

Calcolo I - Corso di Laurea in Fisica - 19 Febbraio 2020
Prova scritta

Cognome e Nome:

Matricola:

1) Data la funzione

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x + e^{-3|x|}}{e^x + e^{2x}} \right)$$

- a) Determinare: il dominio di definizione; le equazioni di eventuali asintoti; eventuali punti di non derivabilità.
- b) Calcolare, se esistono, estremi relativi ed assoluti.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

2) Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^x, & x \leq 0; \\ \frac{e^x \ln(1+3x)}{P(x)}, & x > 0 \end{cases}$$

dipendente dal polinomio $P(x) = a + bx + cx^2$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinare i parametri a, b, c affinché la funzione risulti continua e derivabile in $x = 0$.

3) Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2} \right) x^k$$

specificando gli intervalli di convergenza semplice, assoluta e uniforme.

Facoltativo: provare che $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2} \right) (1/2)^k < 3/4$

4) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0, +\infty)$ della funzione

$$f_{\alpha}(x) = \frac{\ln(x)(2\sqrt{x} + 3)}{\ln^{6-3\alpha}(1+x)(x + 3\sqrt{x} + 2)^{\alpha} \sqrt{x}}.$$

Calcolare l'integrale per $\alpha = 2$ ossia $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)(2\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(x+3\sqrt{x}+2)^2} dx$.

5) Data l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - \dot{x} = e^t$$

- a) Trovare la soluzione generale dell'equazione.
- b) Risolvere il problema di Cauchy $\dot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0, x(0) = 1$.