

**Calcolo I - Corso di Laurea in Fisica - 22 Gennaio 2018**  
**Esonero scritto**

**Cognome e Nome:**

**Matricola:**

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\arctan^{\alpha+1}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)^2 \sqrt{x} \ln^\alpha(1+x)}, \quad \alpha \in [0, +\infty)$$

- a) studiare, al variare del parametro  $\alpha \in [0, +\infty)$ , l'integrabilità in senso improprio della funzione nell'intervallo  $(0, +\infty)$  ;
- b) Calcolare per  $\alpha = 0$  l'integrale  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ .

2) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{k+2} + \sin\left(\frac{1}{k}\right) k - 1 \right)$$

3) Data l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{1+x^2}{t-2},$$

trovare le soluzioni massimali, specificandone il dominio di definizione, dei seguenti problemi di Cauchy:  $x(1) = 0$  e  $x(3) = 0$

4) Data la funzione

$$f(x, y) := x^3 - 3x^2y^2 + y^2,$$

Discutere la differenziabilità e classificare i punti critici di  $f(x)$ .