

**Calcolo I - Corso di Laurea in Fisica - 1 Dicembre 2017**  
**Esonero scritto**

**Cognome e Nome:**

**Matricola:**

1) Data la funzione

$$f(x) = (5 - x)e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)}$$

- a) Calcolare dominio ed eventuali asintoti.
- b) Studiare la monotonia, trovare gli estremi locali/globali e calcolare l'immagine di  $f$ .

Tracciare un grafico qualitativo di  $f$ . Non è richiesto lo studio della convessità.

2) Data la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^x - x, & x \leq 0 \\ -x^3 + bx^2 + c \sin(x) + d, & x > 0 \end{cases}, \quad b, c, d \in \mathbb{R}$$

- a) Trovare per quali valori dei parametri  $b, c, d \in \mathbb{R}$  la funzione risulti, contemporaneamente, continua, derivabile ed invertibile nel suo dominio di definizione (motivare le risposte).
- b) Per i valori dei parametri trovati nel punto precedente calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto  $(y_0, f^{-1}(y_0))$  dove  $y_0 = \frac{e+1}{e}$ . Calcolare inoltre il limite

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{\ln(y) - \ln(y_0)}.$$

3) Studiare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x - \frac{x^2}{2}} - \cos(x^5) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x\sqrt{2})}{\sin(x) \ln(\cos(x)) + x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{((n-1)! + 4^n) \left( (-1)^n n + \ln^3(n) \right)}{(n! + n^{n/2}) \left( \frac{-n}{n+1} \right)^n}.$$