Integrali, integrali senso improprio e funzioni integrali

1. Calcolare i seguenti integrali e integrali impropri.

   (a) Discutere, al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$, l'integrabilità in senso improprio in $(0,+\infty)$ della funzione

   $$f_\alpha(x) = \frac{4\ln(t)\,t}{(t^2+1)^{3/2}}\,(t-\sin(t))^\alpha\ .$$

   Calcolare l'integrale per $\alpha = 0$ ossia $\int_0^{+\infty} \frac{4\ln(t)\,t}{(t^2+1)^{3/2}}\,dt$.

   (b) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0,+\infty)$ della funzione

   $$f_\alpha(x) = \frac{\ln(x+5\sqrt{x}+6)}{(x^\alpha+3)^2\,x^\alpha}\ .$$

   Calcolare l'integrale per $\alpha = 1/2$ ossia $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+5\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+3)^2\sqrt{x}}\,dx$.

   (c) Discutere, al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0,+\infty)$ della seguente funzione

   $$f(x) = \frac{(2x+5)\cdot(x-\sin(x))^\alpha\cdot\ln(x+3)}{(x^2+5x+6)^2\cdot\ln^{2\alpha}(x+1)}\ dx\ ,$$

   e calcolare l'integrale per $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ per $\alpha = 0$.

   (d) Data la funzione

   $$f(x) = \frac{\ln(x^8-1)}{(x^4-1)^2}\,4x^3\ .$$

   calcolarne l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (e) Data la funzione

   $$f(x) = \frac{1}{(x+2)^\alpha}\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\ .$$

   a) Discutere al variare del parametro $\alpha > 0$ l'integrabilità in senso improprio della funzione $f(x)$ nell'ntervallo $(-2,+\infty)$.
   b) Calcolare l'integrale $\int_{-2}^{+\infty} f(x)dx$ per $\alpha = 1/2$.

   (f) Data la funzione

   $$f(x) = \frac{\cos^2(x)}{(\sin^2(x)-\cos^2(x))(\sin^2(x)+4\cos^2(x))}.$$

   calcolarne l'integrale $\int_0^{\pi/6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(g) Discutere, al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$, l'integrabilità in senso improprio in $[0,+\infty)$ della funzione

$$f(x) = \frac{e^x \ln(e^{2x} + 3e^x + 2)}{(e^x + 1)^\alpha} \, dx\,,$$

e calcolare l'integrale per $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ per $\alpha = 2$.

(h) Studiare l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(1,+\infty)$ della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2(\sqrt{x^2-1})(1+\sqrt{x^2-1})^2}$$

e calcolare l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

(i) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x \ln(x^4 - 1)}{(x^2-1)^2}\,.$$

calcolare l'integrale indefinto $\int f(x)\, \mathrm{d}x$.

(j) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(2e^{2x} - 6e^x + 4)e^x}\,,$$

calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\, \mathrm{d}x$.

(k) Data la funzione

$$f(x) = \frac{(2x+4)\ln(x+1)}{(x^2+4x+3)^2}\,.$$

i. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\, \mathrm{d}x$.

ii. Stabilire se $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intevallo $[0,+\infty)$ e, nel caso affermativo, calcolare $\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$.

(l) Data la funzione

$$f(x) = \frac{(4x+1)\ln(1+2x)}{(2x^2+x)^\alpha}\,,$$

(a) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità in senso improprio di $f(x)$ nell'intervallo $(0,+\infty)$.

(b) Calcolare per $\alpha = 2$ l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$.

(m) Studiare l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0,+\infty)$ della seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + \sqrt[3]{x})\ln(|1-\sqrt{x}|)}\,.$$

(n) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^6-1)}{(x^3-1)^2}\, 3\,x^2\,.$$

i. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
ii. Stabilire se $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intevallo $(2,+\infty)$ e, nel caso affermativo, calcolare $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(o) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^{2/5}+1)}{(x^{1/5}+2)^2\,x^{4/5}}\,\mathrm{d}x\,.$$

i. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
ii. Stabilire se $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intevallo $(0,+\infty)$ e, nel caso affermativo, calcolare $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
iii. Determinare l'intervallo massimo $(\alpha,+\infty)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, per cui esista in senso improprio l'integrale $\int_\alpha^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Studiare le seguenti funzioni integrali.

(a) Data la funzione integrale

$$G(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

i. Determinare il dominio di definizione e l'esistenza di eventuali asintoti (si noti che $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
ii. Stabilire se la funzione è simmetrica.
iii. Studiare la monotonia e l'esistenza di punti di massimo/minimo.
iv. Studiare la convessità.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

3. Data la funzione

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$$

(a) Determinare per quali valori di $x\in\mathbb{R}$ la funzione è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(0,\infty)$.
(b) Calcolare $\Gamma(n)$ per $n\in\mathbb{N}$ (usare il principio di induzione).

4. Data la funzione integrale

$$F(x) := \int_0^x \ln(\cosh(t))\,dt$$

(a) Determinare il dominio di definizione e l'esistenza di eventuali asintoti.

(b) Stabilire se la funzione è simmetrica.
(c) Studiare la monotonia e l'esistenza di punti di massimo/minimo.
(d) Studiare la convessità.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

5. Data la funzione integrale

$$F(x) := \int_0^x \arctan(x^3+1)\,dt$$

(a) Determinare il dominio di definizione e l'esistenza di eventuali asintoti.
(b) Studiare la monotonia e l'esistenza di punti di massimo/minimo.
(c) Studiare la convessità.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.