

Analisi Matematica I
Integrali e integrali impropri (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

- (1) Si ha $\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + 2 \operatorname{arctg} x + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}$.
- (2) Si ha $\int \frac{2x+1}{x(x^2-1)} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{3}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{3}{2} \log|x-1| - \log|x| - \frac{1}{2} \log|x+1| + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x+1}{x(x^2-1)} = \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$.
- (3) Si ha $\int \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x-2} \right) dx = 2 \log|x-1| - \frac{3}{2} \log|x| - \frac{1}{2} \log|x-2| + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x-2}$.
- (4) Si ha $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = x + \log|x| + \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^3+1}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.
- (5) Si ha $\int \frac{2x^4+3}{x(x+1)^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(2x - 4 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2} \right) dx = x^2 - 4x + 3 \log|x| + 3 \log|x+1| + \frac{5}{x+1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x^4+3}{x(x+1)^2} = 2x - 4 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2}$.
- (6) Si ha $\int \frac{x^2+3x+1}{x(x^2-1)^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{5}{4} \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \log|x| + \frac{1}{4} \log|x+1| - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{5}{4} \log|x-1| - \frac{5}{4} \frac{1}{x-1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^2+3x+1}{x(x^2-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{5}{4} \frac{1}{(x-1)^2}$.
- (7) Si ha $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$.
- (8) Si ha $\int \frac{x^4+1}{x^2+2x+2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(x^2 - 2x + 2 - \frac{3}{x^2+2x+2} \right) dx = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 2x - 3 \operatorname{arctg}(x+1) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^4+1}{x^2+2x+2} = x^2 - 2x + 2 - \frac{3}{x^2+2x+2}$.
- (9) Si ha $\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{3}{x^2-2x+2} \right) dx = \log|x-1| - \frac{1}{2} \log(x^2-2x+2) + 3 \operatorname{arctg}(x-1) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-4}{x^2-2x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{3}{x^2-2x+2}$.
- (10) Si ha $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$.
- (11) Si ha $\int \frac{3x+1}{x^2+x+1} dx = \int \left(\frac{3}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx = \frac{3}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$.
- (12) Si ha $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$.
- (13) Si ha $\int \frac{x^2+5x+2}{(x^2+1)(x^2-x)} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1} \right) dx = 4 \log|x-1| - 2 \log|x| - \log(x^2+1) - 3 \operatorname{arctg} x + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^2+5x+2}{(x^2+1)(x^2-x)} = \frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x+3}{x^2+1}$.

(14) Si ha $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^2+4} \right) dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{12} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^2+4}$.

(15) Si ha $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + c = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} \right)$.

(16) Si ha $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} \right) dx = -\frac{3}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} + c$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Dx^2+Ex+F}{x(x^2+1)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}$. □

Svolgimento esercizio 2

(1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{2y^2}{y+1} dy = 2 \int \left(y - 1 + \frac{1}{y+1} \right) dy = y^2 - 2y + 2 \log |y+1| + C = x - 2\sqrt{x} + 2 \log |\sqrt{x} + 1| + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies dx = 2y dy$.

(2) $\int \frac{\sqrt{x+1}+3}{x+2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{2(y^2+3y)}{y^2+1} dy \stackrel{(b)}{=} 2 \int \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2y-1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1} \right) dy = 2y + 3 \log(y^2+1) - 2 \operatorname{arctg} y + C = 2\sqrt{x+1} + 3 \log |x+2| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x+1} = y \implies dx = 2y dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^2+3y}{y^2+1} = 1 + \frac{3y-1}{y^2+1} = 1 + \frac{3}{2} \frac{2y-1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1}$.

(3) $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{x+2\sqrt{x-1}+2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{2(y^2+y)}{y^2+2y+3} dy \stackrel{(b)}{=} 2 \int \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2y+2}{y^2+2y+3} - \frac{2}{y^2+2y+3} \right) dy = 2y - \log(y^2+2y+3) - 2 \int \frac{dy}{\left(\frac{y+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = 2y - \log(y^2+2y+3) - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{y+1}{\sqrt{2}} + C = 2\sqrt{x-1} - \log |x+2\sqrt{x-1}+2| - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{2}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies dx = 2y dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^2+y}{y^2+2y+3} = 1 - \frac{y+3}{y^2+2y+3} = 1 - \frac{1}{2} \frac{2y+2}{y^2+2y+3} - \frac{2}{y^2+2y+3}$.

(4) $\int \frac{1}{e^{2x}+9} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{1}{y(y^2+9)} dy \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{9} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+9} \right) dy = \frac{1}{9} \log |y| - \frac{1}{18} \log(y^2+9) + C = \frac{1}{9} x - \frac{1}{18} \log(e^{2x}+9) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^x = y \implies x = \log y, dx = \frac{dy}{y}$, e in (b) la decomposizione $\frac{1}{y(y^2+9)} = \frac{1}{9} \frac{1}{y} - \frac{1}{9} \frac{y}{y^2+9}$.

(5) $\int e^{1-\sqrt[3]{x}} dx \stackrel{(a)}{=} \int 3(1-y)^2 e^y dy \stackrel{(b)}{=} 3(y-1)^2 e^y - \int 6(y-1)e^y dy = 3(y-1)^2 e^y - 6(y-1)e^y - \int 6e^y + C = 3(y-1)^2 e^y - 6(y-1)e^y - 6e^y + C = 3e^{1-\sqrt[3]{x}}(x^{2/3} + 2x^{1/3} - 2) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $1 - \sqrt[3]{x} = y \implies x = (1-y)^3, dx = 3(1-y)^2 dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = (y-1)^2, & f'(y) = 2(y-1), \\ g'(y) = e^y, & g(y) = e^y, \end{cases}$ e in (c) l'integrazione per parti con

$$\begin{cases} f(y) = y-1, & f'(y) = 1, \\ g'(y) = e^y, & g(y) = e^y. \end{cases}$$

(6) $\int \frac{\log \log x}{x} dx \stackrel{(a)}{=} \int \log y dy \stackrel{(b)}{=} y(\log y - 1) + C = \log x(\log \log x - 1) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\log x = y \implies \frac{dx}{x} = dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \log y, & f'(y) = \frac{1}{y}, \\ g'(y) = 1, & g(y) = y. \end{cases}$

(7) $\int (x^2 + 1) \log(x + 1) dx \stackrel{(a)}{=} (\frac{1}{3}x^3 + x) \log(x + 1) - \int (\frac{1}{3}x^3 + x) \frac{1}{x+1} dx \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{3} (x^3 + 3x) \log(x + 1) - \frac{1}{3} \int (x^2 - x + 4 - \frac{4}{x+1}) dx = \frac{1}{3} (x^3 + 3x) \log(x + 1) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{6} x^2 - \frac{4}{3} x + \frac{4}{3} \log|x + 1| + C$, dove

si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log(x + 1), & f'(x) = \frac{1}{x+1}, \\ g'(x) = x^2 + 1, & g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x, \end{cases}$ e in (b) la

decomposizione $\frac{x^3+3x}{x+1} = x^2 - x + 4 - \frac{4}{x+1}$.

(8) $\int (x - 4)^2 \sin x dx \stackrel{(a)}{=} -(x - 4)^2 \cos x + \int 2(x - 4) \cos x dx \stackrel{(b)}{=} -(x - 4)^2 \cos x + 2(x - 4) \sin x - \int 2 \sin x dx = -(x - 4)^2 \cos x + 2(x - 4) \sin x + 2 \cos x + C$, dove si è usata l'integrazione per parti,

in (a) con $\begin{cases} f(x) = (x - 4)^2, & f'(x) = 2(x - 4), \\ g'(x) = \sin x, & g(x) = -\cos x, \end{cases}$ e in (b) con $\begin{cases} f(x) = 2(x - 4), & f'(x) = 2, \\ g'(x) = \cos x, & g(x) = \sin x, \end{cases}$

(9) $\int \sin^3 x \cos^6 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^6 x \sin x dx \stackrel{(a)}{=} \int (y^2 - 1)y^6 dy = \frac{1}{9} y^9 - \frac{1}{7} y^7 + C = \frac{1}{9} \cos^9 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x dx = dy$.

(10) $\int \sin^2 x \cos^7 x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^3 \cos x dx \stackrel{(a)}{=} \int y^2 (1 - y^2)^3 dy = \frac{1}{3} y^3 - \frac{3}{5} y^5 + \frac{3}{7} y^7 - \frac{1}{9} y^9 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{3}{5} \sin^5 x + \frac{3}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sin x = y \implies \cos x dx = dy$.

(11) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \stackrel{(a)}{=} -\int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{y} + C = \frac{1}{\cos x} + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x dx = dy$.

(12) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx \stackrel{(a)}{=} -\int \frac{1 - y^2}{y^2} dy = y + \frac{1}{y} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x dx = dy$.

(13) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^3 x} \sin x dx \stackrel{(a)}{=} -\int \frac{(1 - y^2)^2}{y^3} dy = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} + 2 \log|y| - \frac{1}{2} y^2 + C = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \log|\cos x| - \frac{1}{2} \cos^2 x + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x dx = dy$.

(14) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{y^4}{(y^2+1)^2} dy \stackrel{(b)}{=} \int (1 + \frac{3}{2} \frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \frac{y}{y^2+1}) dy = y + \frac{3}{2} \arctg y - \frac{1}{2} \frac{y}{y^2+1} + C = \text{tg } x + \frac{3}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $y = \text{tg } x \implies \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$, $\sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^4}{(y^2+1)^2} = 1 - \frac{2y^2+1}{(y^2+1)^2} = 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \frac{y}{y^2+1}$.

(15) $\int \frac{\cos^2 x}{4 \cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{1 + 3 \cos^2 x} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{1}{(y^2+1)(y^2+4)} dy = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y^2+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{3} \arctg y - \frac{1}{3} \frac{1}{2} \arctg \frac{y}{2} = \frac{1}{3} x - \frac{1}{6} \arctg \frac{\text{tg } x}{2}$, dove in (a) si è usata la sostituzione $y = \text{tg } x \implies \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

(16) $\int \arcsin \sqrt{x} dx \stackrel{(a)}{=} \int 2y \arcsin y dy \stackrel{(b)}{=} y^2 \arcsin y - \int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy \stackrel{(c)}{=} y^2 \arcsin y - \int \sin^2 z dz = y^2 \arcsin y - \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2z) dz = y^2 \arcsin y - \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} \sin 2z + C = y^2 \arcsin y - \frac{1}{2} \arcsin y + \frac{1}{2} y \sqrt{1 - y^2} + C = (x - \frac{1}{2}) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione

$\sqrt{x} = y \implies dx = 2y dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \arcsin y, & f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \\ g'(y) = 2y, & g(y) = y^2, \end{cases}$

e in (c) la sostituzione $y = \sin z \implies dy = \cos z dz$.

(17) $\int \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{2y}{\cos^2 y} dy \stackrel{(b)}{=} 2y \text{tg } y - \int 2 \text{tg } y dy = 2y \text{tg } y - 2 \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = 2y \text{tg } y + 2 \log|\cos y| +$

$C = 2\sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x} + 2 \log |\cos \sqrt{x}| + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies dx = 2y dy$,

in (b) l'integrazione per parti con
$$\begin{cases} f(y) = 2y, & f'(y) = 2, \\ g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}, & g(y) = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

$$(18) \int x \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{4}{9}(y^2 - 1) \cdot y \cdot \frac{8}{9}y dy = \frac{32}{81} \left(\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 \right) + C = \frac{32}{81} \left(\frac{81}{80}x^2 + \frac{3}{20}x - \frac{2}{15} \right) \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} + C,$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $y = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \implies x = \frac{4}{9}(y^2 - 1)$, $dx = \frac{8}{9}y dy$.

$$(19) \int \sqrt{x^2 + 1} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{y^2+1}{2y} \frac{y^2+1}{2y^2} dy = \frac{1}{4} \int \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dy = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}y^2 + 2 \log |y| - \frac{1}{2y^2} \right) + C = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C,$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1 + x^2} = y - x \implies x = \frac{y^2 - 1}{2y}$, $dx = \frac{y^2 + 1}{2y^2} dy$, $\sqrt{1 + x^2} = \frac{y^2 + 1}{2y}$.

$$(20) \int \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \left(\frac{2t}{t^2-1} \right)^2 \frac{t^2+1}{2t} \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \int \frac{(t^2+1)^2}{t(t^2-1)^2} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \log |t| - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + C = \dots = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C,$$

dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $\sqrt{x^2 + 1} = t - x \implies x = \frac{t^2 - 1}{2t}$, $dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$, $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t}$.

$$(21) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{z^2-1}{2z} \frac{1}{\frac{z^2+1}{2z}+2} \frac{z^2-1}{2z^2} dz = \frac{1}{2} \int \frac{(z-1)^2}{z^2} dz = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} \right) dz = \frac{1}{2} z - \log |z| - \frac{1}{2z} + C = \sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C,$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{x^2 - 1} = z - x \implies x = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $dx = \frac{z^2 - 1}{2z^2} dz$, $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{z^2 - 1}{2z}$.

$$(22) \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{\cos^2 y}{1+\sin^2 y} dy = \int \frac{\cos^2 y}{2\sin^2 y + \cos^2 y} dy = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 y + 1} dy \stackrel{(b)}{=} \int \frac{1}{2z^2+1} \frac{dz}{z^2+1} \stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2} \int \left(\frac{2}{z^2+\frac{1}{2}} - \frac{2}{z^2+1} \right) dz = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(\sqrt{2}z)^2+1} - \arctg z = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}z) - \arctg z + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \operatorname{tg} y) - y + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \operatorname{tg} \arcsin x) - \arcsin x + C \stackrel{(d)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \arcsin x + C,$$

dove si è usata in (a) la sostituzione $x = \sin y \implies dx = \cos y dy$, in (b) la sostituzione $y = \arctg z \implies dy = \frac{dz}{z^2+1}$, in (c) la decomposizione $\frac{1}{z^2+\frac{1}{2}} - \frac{1}{z^2+1} = \frac{2}{z^2+\frac{1}{2}} - \frac{2}{z^2+1}$, e in (d) la formula $\operatorname{tg} \arcsin x = \frac{\sin \arcsin x}{\sqrt{1-\sin^2 \arcsin x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$(23) \int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int 9 \sin^2 t \cdot 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt \stackrel{(b)}{=} \frac{81}{8} \int (1 - \cos 4t) dt = \frac{81}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) + C = \frac{81}{8} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{81}{32} \sin \left(4 \arcsin \frac{x}{3} \right) + C \stackrel{(c)}{=} \frac{81}{8} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{8} x(9 - 2x^2) \sqrt{9 - x^2} + C,$$

dove in (a) si è eseguita la sostituzione $x = 3 \sin t \implies dx = 3 \cos t dt$, in (b) si è usato il risultato $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \sin^2(2t) = \frac{1}{8} (1 - \cos 4t)$, e in (c) i risultati $\sin 4z = 4 \sin z \cos z (1 - 2 \sin^2 z)$ e $\sin \left(4 \arcsin \frac{x}{3} \right) = 4 \frac{x}{3} \left(1 - \frac{2x^2}{9} \right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{4}{81} x(9 - 2x^2) \sqrt{9 - x^2}$.

□

Svolgimento esercizio 3

$$(1) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{|\sin x|}{\cos x} dx = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = 2 \left[-\log |\cos x| \right]_0^{\pi/4} = \log 2.$$

$$(2) \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^3 x dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x dx \stackrel{(a)}{=} -\int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = \left[\frac{1}{3} y^3 - y \right]_{-1}^1 = -\frac{4}{3},$$

dove si è usata in (a) la sostituzione $\sin x = y \implies \cos x dx = dy$.

$$(3) \int_0^{2\pi} |\sin x|^3 dx = 2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \sin x dx \stackrel{(a)}{=} 2 \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = 2 \left[y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3},$$

dove si è usata in (a) la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x dx = dy$.

(4) $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1-\sin x} dx \stackrel{(a)}{=} \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{1-\frac{2y}{1+y^2}} \frac{2dy}{1+y^2} = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2dy}{(y-1)^2} = \left[-\frac{2}{y-1}\right]_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{6}{3-\sqrt{3}} - 2 = 1 + \sqrt{3}$, dove si è usata in (a) la sostituzione $x = 2 \operatorname{arctg} y \implies \sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$.

(5) $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\sin^2 x} dx \stackrel{(a)}{=} \int_0^1 \frac{y}{1+\frac{y^2}{1+y^2}} \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{y dy}{2y^2+1} = \left[\frac{1}{4} \log(2y^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{4} \log 3$, dove si è usata in (a) la sostituzione $x = \operatorname{arctg} y \implies \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

(6) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\cos x}} dx \stackrel{(a)}{=} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{\sqrt{1-y}} dy \stackrel{(b)}{=} -2 \int_{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}^1 (z^2-1) dz = -2 \left[\frac{1}{3} z^3 - z\right]_{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}^1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3/2} - 2\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x dx = dy$, e in (b) la sostituzione $\sqrt{1-y} = z \implies y = 1-z^2$, $dy = -2z dz$.

(7) $\int_1^e \frac{(2 \log x + 1) \operatorname{arctg}(\log x)}{x} dx \stackrel{(a)}{=} \int_0^1 (2y+1) \operatorname{arctg} y dy \stackrel{(b)}{=} \left[(y^2+y) \operatorname{arctg} y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2+y}{y^2+1} dy \stackrel{(c)}{=} \frac{\pi}{2} + \left[y + \frac{1}{2} \log(y^2+1) - \operatorname{arctg} y\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{1}{2} \log 2$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\log x = y \implies \frac{dx}{x} = dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \operatorname{arctg} y, & f'(y) = \frac{1}{y^2+1}, \\ g'(y) = 2y+1, & g(y) = y^2+y, \end{cases}$ e in (c) il risultato $\int \frac{y^2+y}{y^2+1} dy = \int \left(1 + \frac{y-1}{y^2+1}\right) dy = \int \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = y + \frac{1}{2} \log(y^2+1) - \operatorname{arctg} y + C$.

(8) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \sqrt{1+4 \cos^2 x} dx \stackrel{(a)}{=} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1+4y^2}}{y^2} dy \stackrel{(b)}{=} \int_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{5}} \frac{z^2+1}{2z} \frac{16z^2}{(z^2-1)^2} \frac{z^2+1}{4z^2} dz = 2 \int_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{5}} \frac{(z^2+1)^2}{z(z^2-1)^2} dz \stackrel{(c)}{=} 2 \int_{5+2\sqrt{6}}^{9+4\sqrt{5}} \frac{(t+1)^2}{t(t-1)^2} dt \stackrel{(d)}{=} \left[\log |t| - \frac{4}{t-1}\right]_{5+2\sqrt{6}}^{9+4\sqrt{5}} = \log \frac{9+4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}} - \frac{4}{8+4\sqrt{5}} + \frac{4}{4+2\sqrt{6}} = \dots = \log \frac{9+4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{6} - \sqrt{5}$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $y = \cos x \implies dy = -\sin x dx$, in (b) si è eseguito il cambiamento di variabile $\sqrt{1+4y^2} = z - 2y \implies y = \frac{z^2-1}{4z}$, $\sqrt{1+4y^2} = \frac{z^2+1}{2z}$, $dy = \frac{z^2+1}{4z^2} dz$, in (c) si è eseguito il cambiamento di variabile $t = z^2 \implies dt = 2z dz$, e in (d) si è usato il risultato $\int \frac{(t+1)^2}{t(t-1)^2} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{4}{(t-1)^2}\right) dt = \log |t| - \frac{4}{t-1}$. □

Svolgimento esercizio 4

(1) Determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C$.

Allora $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^-} [\arcsin(2x-1)]_a^{1/2} + \lim_{b \rightarrow 1^-} [\arcsin(2x-1)]_{1/2}^b = \pi$.

(2) Determiniamo una primitiva: poiché $\int x(1-\cos x)e^{-x} dx = \int xe^{-x} dx - \int xe^{-x} \cos x dx$, calcoliamo $\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} + C$, e $\int xe^{-x} \cos x dx \stackrel{(a)}{=} -(x+1)e^{-x} \cos x - \int (x+1)e^{-x} \sin x dx \stackrel{(b)}{=} -(x+1)e^{-x} \cos x + (x+2)e^{-x} \sin x - \int (x+2)e^{-x} \cos x dx$, dove si è usata l'integrazione per parti, in (a) con $\begin{cases} f(x) = \cos x, & f'(x) = -\sin x, \\ g'(x) = xe^{-x}, & g(x) = -(x+1)e^{-x}, \end{cases}$ e in (b) con

$\begin{cases} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, \\ g'(x) = (x+1)e^{-x}, & g(x) = -(x+2)e^{-x}. \end{cases}$ Quindi, $2 \int xe^{-x} \cos x dx + 2 \int e^{-x} \cos x dx = -(x+1)e^{-x} \cos x + (x+2)e^{-x} \sin x$, cioè $\int xe^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}(x+2)e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx \stackrel{(c)}{=} 1)e^{-x} \cos x + (x+2)e^{-x} \sin x$, cioè $\int xe^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}(x+2)e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx \stackrel{(c)}{=} 1)e^{-x} \cos x + (x+2)e^{-x} \sin x$.

$\frac{1}{2}(x+2)e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} \cos x - \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}xe^{-x} \cos x + C$,
dove in (c) si è usato il risultato $\int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \cos x dx \implies \int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)$. Concludendo, $\int x(1-\cos x)e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} \sin x + \frac{1}{2}xe^{-x} \cos x + C$. Allora $\int_0^{+\infty} x(1-\cos x)e^{-x} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} [- (x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} \sin x + \frac{1}{2}xe^{-x} \cos x]_0^{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2}\omega e^{-\omega} \cos \omega - (\omega+1)e^{-\omega} - \frac{1}{2}(\omega+1)e^{-\omega} \sin \omega + 1) = 1$.

(3) Determiniamo una primitiva $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{3y dy}{y^3+1} \stackrel{(b)}{=} \int (-\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{y^2-y+1}) dy + C = -\log|y+1| + \frac{1}{2} \log(y^2-y+1) + 2 \int \frac{dy}{1+(\frac{2y-1}{\sqrt{3}})^2} + C = \frac{1}{2} \log(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1) - \log|1 + \sqrt[3]{x-1}| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3 + 1, dx = 3y^2 dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{3y}{y^3+1} = -\frac{1}{y+1} + \frac{y+1}{y^2-y+1} = -\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{y^2-y+1}$. Allora $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^+} [\frac{1}{2} \log(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1) - \log|1 + \sqrt[3]{x-1}| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}]_c^2 + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} [\frac{1}{2} \log(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1} + 1) - \log|1 + \sqrt[3]{\omega-1}| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}]_2^{\omega} = -\lim_{c \rightarrow 1^+} (\frac{1}{2} \log(\sqrt[3]{(c-1)^2} - \sqrt[3]{c-1} + 1) - \log|1 + \sqrt[3]{c-1}| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{c-1}-1}{\sqrt{3}}) + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2} \log(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1} + 1) - \log|1 + \sqrt[3]{\omega-1}| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2} \log \frac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1} + 1}{(1 + \sqrt[3]{\omega-1})^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi$.

(4) Determiniamo una primitiva $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}} dx \stackrel{(a)}{=} \int \frac{3y dy}{y^3+8} \stackrel{(b)}{=} \int (-\frac{1}{2} \frac{1}{y+2} + \frac{1}{4} \frac{2y-2}{y^2-2y+4} + \frac{3}{2} \frac{1}{y^2-2y+4}) dy + C = -\frac{1}{2} \log|y+2| + \frac{1}{4} \log(y^2-2y+4) + \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+(\frac{y-1}{\sqrt{3}})^2} + C = \frac{1}{4} \log(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} + 4) - \frac{1}{2} \log|2 + \sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3 + 1, dx = 3y^2 dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{3y}{y^3+8} = -\frac{1}{2} \frac{1}{y+2} + \frac{1}{2} \frac{y+2}{y^2-2y+4} = -\frac{1}{2} \frac{1}{y+2} + \frac{1}{4} \frac{2y-2}{y^2-2y+4} + \frac{3}{2} \frac{1}{y^2-2y+4}$. Allora $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}} dx = \lim_{a \rightarrow 1^-} [\frac{1}{4} \log(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} + 4) - \frac{1}{2} \log|2 + \sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}]_0^a + \lim_{b \rightarrow 1^+} [\frac{1}{4} \log(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} + 4) - \frac{1}{2} \log|2 + \sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}]_b^{\omega} + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} [\frac{1}{4} \log(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - 2\sqrt[3]{\omega-1} + 4) - \frac{1}{2} \log|2 + \sqrt[3]{\omega-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}]_2^{\omega} = \lim_{a \rightarrow 1^-} (\frac{1}{4} \log(\sqrt[3]{(a-1)^2} - 2\sqrt[3]{a-1} + 4) - \frac{1}{2} \log|2 + \sqrt[3]{a-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{a-1}-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \log 7) - \lim_{b \rightarrow 1^+} (\frac{1}{4} \log(\sqrt[3]{(b-1)^2} - 2\sqrt[3]{b-1} + 4) - \frac{1}{2} \log|2 + \sqrt[3]{b-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{b-1}-1}{\sqrt{3}}) + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\frac{1}{4} \log(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - 2\sqrt[3]{\omega-1} + 4) - \frac{1}{2} \log|2 + \sqrt[3]{\omega-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{4} \log 7 + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\frac{1}{4} \log \frac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - 2\sqrt[3]{\omega-1} + 4}{(2 + \sqrt[3]{\omega-1})^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{4} \log 7 + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{\pi\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{4} \log 7 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

(5) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}} dx \stackrel{(a)}{=} -\frac{2 \log x}{\sqrt{x-1}} + \int \frac{2}{x\sqrt{x-1}} dx \stackrel{(b)}{=} -\frac{2 \log x}{\sqrt{x-1}} + \int \frac{4 dy}{y^2+1} = -\frac{2 \log x}{\sqrt{x-1}} + 4 \operatorname{arctg} y + C = -\frac{2 \log x}{\sqrt{x-1}} + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log x, & f'(x) = \frac{1}{x}, \\ g'(x) = \frac{1}{(x-1)^{3/2}}, & g(x) = -\frac{2}{\sqrt{x-1}}, \end{cases}$ e in (b) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies x = y^2 + 1, dx = 2y dy$. Allora $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^+} [-\frac{2 \log x}{\sqrt{x-1}} + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}]_c^2 + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} [-\frac{2 \log x}{\sqrt{x-1}} + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}]_2^{\omega} = \lim_{c \rightarrow 1^+} (\frac{2 \log c}{\sqrt{c-1}} - 4 \operatorname{arctg} \sqrt{c-1}) + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (-\frac{2 \log \omega}{\sqrt{\omega-1}} + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\omega-1}) = 2\pi$.

(6) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\log x}{(x-1)^{4/3}} dx \stackrel{(a)}{=} -\frac{3 \log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \frac{3}{x \sqrt[3]{x-1}} dx \stackrel{(b)}{=} -\frac{3 \log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \frac{9y dy}{y^3+1} \stackrel{(c)}{=} -\frac{3 \log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \left(-\frac{3}{y+1} + \frac{3}{2} \frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{9}{2} \frac{1}{y^2-y+1} \right) dy + C = -\frac{3 \log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3 \log |y+1| + \frac{3}{2} \log(y^2-y+1) + 6 \int \frac{dy}{1+\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + C = -\frac{3 \log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3 \log |1+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2} \log \left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1 \right) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} +$

C , dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log x, & f'(x) = \frac{1}{x}, \\ g'(x) = \frac{1}{(x-1)^{4/3}}, & g(x) = -\frac{3}{\sqrt[3]{x-1}}, \end{cases}$ in

(b) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3 + 1, dx = 3y^2 dy$, e in (c) la decomposizione $\frac{9y}{y^3+1} = -\frac{3}{y+1} + \frac{3(y+1)}{y^2-y+1} = -\frac{3}{y+1} + \frac{3}{2} \frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{9}{2} \frac{1}{y^2-y+1}$. Allora $\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{4/3}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^+} \left[-\frac{3 \log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3 \log |1 + \sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2} \log \left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1 \right) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} \right]_c + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[-\frac{3 \log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3 \log |1 + \sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2} \log \left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1 \right) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} \right]_2^\omega = \lim_{c \rightarrow 1^+} \left(\frac{3 \log c}{\sqrt[3]{c-1}} + 3 \log |1 + \sqrt[3]{c-1}| - \frac{3}{2} \log \left(\sqrt[3]{(c-1)^2} - \sqrt[3]{c-1} + 1 \right) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{c-1}-1}{\sqrt{3}} \right) + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3 \log \omega}{\sqrt[3]{\omega-1}} - 3 \log |1 + \sqrt[3]{\omega-1}| + \frac{3}{2} \log \left(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1} + 1 \right) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3 \log \omega}{\sqrt[3]{\omega-1}} + \frac{3}{2} \log \frac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1} + 1}{(1 + \sqrt[3]{\omega-1})^2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi.$

(7) Determiniamo una primitiva $\int \log(1+x^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2} \right) dx \stackrel{(a)}{=} -\frac{2x+3}{x(x+3)} \log(1+x^2) + \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{2x+3}{x(x+3)} dx = -\frac{2x+3}{x(x+3)} \log(1+x^2) + 2 \int \frac{2x+3}{(x+3)(x^2+1)} dx \stackrel{(b)}{=} -\frac{2x+3}{x(x+3)} \log(1+x^2) + 2 \int \left(-\frac{3}{10} \frac{1}{x+3} + \frac{3}{20} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{11}{10} \frac{1}{x^2+1} \right) dx = -\frac{2x+3}{x(x+3)} \log(1+x^2) - \frac{3}{5} \log |x+3| + \frac{3}{10} \log(x^2+1) + \frac{11}{5} \operatorname{arctg} x + C$, dove si sono usate

in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log(1+x^2), & f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \\ g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, & g(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = -\frac{2x+3}{x(x+3)}, \end{cases}$ in (b) la

decomposizione $\frac{2x+3}{(x+3)(x^2+1)} = -\frac{3}{10} \frac{1}{x+3} + \frac{1}{10} \frac{3x+11}{x^2+1} = -\frac{3}{10} \frac{1}{x+3} + \frac{3}{20} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{11}{10} \frac{1}{x^2+1}$. Allora $\int_0^\infty \log(1+x^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2} \right) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[-\frac{2x+3}{x(x+3)} \log(1+x^2) - \frac{3}{5} \log |x+3| + \frac{3}{10} \log(x^2+1) + \frac{11}{5} \operatorname{arctg} x \right]_c^2 + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2x+3}{x(x+3)} \log(1+x^2) - \frac{3}{5} \log |x+3| + \frac{3}{10} \log(x^2+1) + \frac{11}{5} \operatorname{arctg} x \right]_2^\omega = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{2c+3}{c(c+3)} \log(1+c^2) + \frac{3}{5} \log |c+3| - \frac{3}{10} \log(c^2+1) - \frac{11}{5} \operatorname{arctg} c \right) + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2\omega+3}{\omega(\omega+3)} \log(1+\omega^2) - \frac{3}{5} \log |\omega+3| + \frac{3}{10} \log(\omega^2+1) + \frac{11}{5} \operatorname{arctg} \omega \right) = \frac{3}{5} \log 3 + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2\omega+3}{\omega(\omega+3)} \log(1+\omega^2) + \frac{3}{10} \log \frac{\omega^2+1}{(\omega+3)^2} + \frac{11}{5} \operatorname{arctg} \omega \right) = \frac{3}{5} \log 3 + \frac{11}{10} \pi.$

□

Svolgimento esercizio 5

- (1) Poiché $f(x) := \frac{\log(x+1)}{x^3+2x+1} = \frac{\log x}{x^3} (1 + o(1))$, $x \rightarrow +\infty$, ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- (2) Poiché $f(x) := \frac{\log(2+x^2)}{\sqrt{x} \operatorname{arctg}(x^2)} = \frac{2 \log x}{\frac{\pi}{2} \sqrt{x}} (1 + o(1))$, $x \rightarrow +\infty$, ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ non converge.
- (3) Sia $f(x) := \frac{\log x}{|x-1|^{5/4} \sin(x^{1/2})}$. Poiché $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}} (1 + o(1))$, $x \rightarrow 0^+$, allora $\int_0^{1/2} f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{(x-1)(1+o(1))}{\sin 1 \cdot |x-1|^{5/4} (1+o(1))} = -\frac{1}{\sin 1} \frac{1}{|x-1|^{1/4}} (1 + o(1))$, $x \rightarrow 1^-$, allora $\int_{1/2}^1 f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

- (4) Sia $f(x) := \frac{\log(x^2)}{x^{1/2} \arcsin(|x-1|^{9/4})}$. Poiché $f(x) = \frac{2 \log x}{\frac{2}{\sqrt{x}}(1+o(1))}$, $x \rightarrow 0^+$, allora $\int_0^{1/2} f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{2(x-1)(1+o(1))}{|x-1|^{9/4}(1+o(1))} = -\frac{2}{|x-1|^{5/4}}(1+o(1))$, $x \rightarrow 1^-$, allora $\int_{1/2}^1 f(x) dx$ non converge. Ne segue che $\int_0^1 f(x) dx$ non converge.
- (5) Sia $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)\log(1+\sqrt{x})}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{x(1+o(1))}$, $x \rightarrow 0^+$, allora $\int_0^1 f(x) dx$ non converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}x^{5/2}\log x(1+o(1))}$, $x \rightarrow +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ non converge.
- (6) Sia $f(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2x+\arctg(x^{1/4})}}$. Poiché $f(x) = \frac{1+o(1)}{x^{1/4}(1+o(1))}$, $x \rightarrow 0^+$, allora $\int_0^1 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2x(1+o(1))}} = o(\frac{1}{x^{100}})$, $x \rightarrow +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- (7) Poiché $f(x) := \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{(x-1)^{1/2}}$ è tale che $|f(x)| \leq \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$, $x \rightarrow 1^+$, allora $\int_1^2 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x}(1+o(1))$, $x \rightarrow +\infty$, allora $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ non converge.
- (8) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-4)^2(x+\frac{1}{2})^{1/3}}$. Poiché $f(x) = \frac{\sqrt{e}(1+o(1))}{\frac{2^x}{4}(x+\frac{1}{2})^{1/3}(1+o(1))}$, $x \rightarrow -\frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^3 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-4}(1+o(1))}{\sqrt{\frac{9}{2}}(x-4)^2(1+o(1))}$, $x \rightarrow 4$, allora $\int_3^5 f(x) dx$ non converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{7/3}(1+o(1))} = o(\frac{1}{x^{100}})$, $x \rightarrow +\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$ non converge.
- (9) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-3)^{1/3}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{e^{-1/2}(1+o(1))}{-3\sqrt{\frac{5}{2}}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x \rightarrow \frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^2 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-3}(1+o(1))}{\sqrt{\frac{5}{2}}(x-3)^{1/3}(1+o(1))}$, $x \rightarrow 3$, allora $\int_2^5 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{5/6}(1+o(1))} = o(\frac{1}{x^{100}})$, $x \rightarrow +\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- (10) Sia $f(x) := \frac{1}{(x-3)^{1/3}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{-3\sqrt{\frac{5}{2}}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x \rightarrow \frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^2 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}(x-3)^{1/3}(1+o(1))}$, $x \rightarrow 3$, allora $\int_2^5 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{5/6}(1+o(1))}$, $x \rightarrow +\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x) dx$ non converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$ non converge.
- (11) Sia $f(x) := \frac{1}{|x-3|^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{(\frac{5}{2})^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x \rightarrow \frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^2 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}|x-3|^{3/4}(1+o(1))}$, $x \rightarrow 3$, allora $\int_2^5 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{5/4}(1+o(1))}$, $x \rightarrow +\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- (12) Sia $f(x) := \frac{\log(3+|x|^{-1/4})}{|x-3|^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{-\frac{1}{4}\log|x|(1+o(1))}{3^{3/4}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+o(1))}$, $x \rightarrow 0$, allora $\int_{-1}^{1/4} f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log(3+\sqrt[4]{2})(1+o(1))}{(\frac{5}{2})^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x \rightarrow \frac{1}{2}$, allora $\int_{1/4}^2 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log(3+3^{-1/4})(1+o(1))}{\sqrt{\frac{5}{2}}|x-3|^{3/4}(1+o(1))}$, $x \rightarrow 3$, allora $\int_2^5 f(x) dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log 3(1+o(1))}{x^{5/4}(1+o(1))}$, $x \rightarrow +\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- (13) Sia $f(x) := e^{-x^2/2}$. Poiché $f(x) = e^{-x^2/2} = o(\frac{1}{x^{100}})$, $x \rightarrow \pm\infty$, allora $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ e $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ convergono. Ne segue che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge.

□

Svolgimento esercizio 6

- (1) Sia $f(x) := \frac{1}{(1+x^2)(x+2)^\beta}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{2+\beta}(1+o(1))}$, per $x \rightarrow +\infty$, allora l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff 2 + \beta > 1 \iff \beta > -1$.
- (2) Sia $f(x) := \frac{(\log(1+\frac{1}{x}))^\beta}{\sqrt{x+1}}$. Poiché $f(x) = \frac{\frac{1}{x^\beta}(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{\beta+1/2}}(1+o(1))$, per $x \rightarrow +\infty$, allora l'integrale $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta + \frac{1}{2} > 1 \iff \beta > \frac{1}{2}$.
- (3) Sia $f(x) := \frac{\arctg(x+7)}{x(\log(x+2))^\beta}$. Poiché $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x(\log x)^\beta(1+o(1))}$, per $x \rightarrow +\infty$, allora l'integrale $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta > 1$.
- (4) Sia $f(x) := (1 - \cos \frac{1}{x^3})^\beta x^{\beta/2}$. Poiché $f(x) = \frac{x^{\beta/2}}{(2x^6)^\beta(1+o(1))} = \frac{1}{2^\beta x^{11\beta/2}}(1+o(1))$, per $x \rightarrow +\infty$, allora l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \frac{11}{2} \beta > 1 \iff \beta > \frac{2}{11}$.
- (5) Sia $f(x) := \frac{|\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x}|^\beta}{\sqrt[3]{x}}$. Poiché $f(x) = \frac{(\frac{1}{6x^3})^\beta(1+o(1))}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6^\beta x^{1+3\beta}}(1+o(1))$, per $x \rightarrow +\infty$, allora l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \frac{1}{3} - 3\beta > 1 \iff \beta < -\frac{2}{9}$.
- (6) Sia $f(x) := \frac{(e^x-1)^\beta}{\sqrt{x(1-x)}}$. Poiché, per $x \rightarrow 0^+$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{1/2-\beta}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^{1/2} f(x) dx$ converge $\iff 1/2 - \beta < 1 \iff \beta > -\frac{1}{2}$. Poiché, per $x \rightarrow 1^-$, $f(x) = \frac{(e-1)^\beta(1+o(1))}{\sqrt{1-x}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{1/2}^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge $\iff \beta > -\frac{1}{2}$.
- (7) Sia $f(x) := \frac{\log x}{(x-1)^\beta}$. Poiché, per $x \rightarrow 1^+$, $f(x) = \frac{(x-1)(1+o(1))}{(x-1)^\beta} = \frac{1}{(x-1)^{\beta-1}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_1^2 f(x) dx$ converge $\iff \beta - 1 < 1 \iff \beta < 2$. Poiché, per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{\log x}{x^\beta(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta > 1$. Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta \in (1, 2)$.
- (8) Sia $f(x) := \frac{\arctg(x^2+3)}{(x+1)^\beta(x+2)}$. Poiché, per $x \rightarrow (-1)^+$, $f(x) = \frac{\arctg 4(1+o(1))}{(x+1)^\beta(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{-1}^2 f(x) dx$ converge $\iff \beta < 1$. Poiché, per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x^{\beta+1}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta + 1 > 1 \iff \beta > 0$. Ne segue che l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta \in (0, 1)$.
- (9) Sia $f(x) := (\arctg \frac{1}{x})^\beta$. Poiché, per $x \rightarrow 0^+$, $f(x) = (\frac{\pi}{2})^\beta(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^2 f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Poiché, per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x^\beta(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta > 1$. Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta > 1$.
- (10) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-3)^\beta \sqrt{x}}$. Poiché, per $x \rightarrow 3^+$, $f(x) = \frac{e^{-3}(1+o(1))}{\sqrt{3}(x-3)^\beta(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_3^4 f(x) dx$ converge $\iff \beta < 1$. Poiché, per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1/2}(1+o(1))} = o(\frac{1}{x^2})$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Ne segue che l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta < 1$.
- (11) Sia $f(x) := \left(\frac{\arctg \frac{1}{x}}{(x-1)^2}\right)^\beta \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}$. Poiché, per $x \rightarrow 1^+$, $f(x) = \frac{(\frac{\pi}{4})^\beta(1+o(1))}{(x-1)^{2\beta}} \frac{1}{(x-1)^{1/3}(1+o(1))} = (\frac{\pi}{4})^\beta \frac{1}{(x-1)^{2\beta+1/3}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^4 f(x) dx$ converge $\iff 2\beta+1/3 < 1 \iff \beta < \frac{1}{3}$. Poi-

ché, per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^\beta}(1+o(1))}{x^{2\beta+4/3}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{3\beta+4/3}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff 3\beta + 4/3 > 1 \iff \beta > -\frac{1}{9}$. Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta \in (-\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$.

(12) Sia $f(x) := (\arctg x)^\beta (\sqrt{x} + 3)^{2\beta}$. Poiché, per $x \rightarrow 0^+$, $f(x) = 3^{2\beta} x^\beta (1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^4 f(x) dx$ converge $\iff \beta > -1$. Poiché, per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = (\frac{\pi}{2})^\beta x^\beta$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta < -1$. Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ non converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

(13) Sia $f(x) := \frac{\cos^2 x + 3}{x^\beta + \sqrt{x}}$. Per $x \rightarrow 0^+$, si ha:

(a) se $\beta > \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta > \frac{1}{2}$,

(b) se $\beta = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4(1+o(1))}{2\sqrt{x}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge,

(c) se $\beta < \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4(1+o(1))}{x^\beta(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta < \frac{1}{2}$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

(14) Si ha $\int_0^{+\infty} \left(e^{-x} + \frac{x^{2\beta+1}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} x^{2\beta-1/2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Ora, il primo integrale converge, la convergenza del secondo integrale dipende da β , ma il terzo integrale non converge. Poiché sono tre addendi positivi, la somma dei tre integrali non converge, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

(15) Sia $f(x) := \frac{\arctg(\frac{1}{x^\beta})}{2+\sqrt{x}}$. Per $x \rightarrow 0^+$, si ha:

(a) se $\beta > 0$, $f(x) = \frac{\pi}{4}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta > 0$,

(b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{\pi}{8}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge,

(c) se $\beta < 0$, $f(x) = \frac{x^{-\beta}(1+o(1))}{2(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Per $x \rightarrow +\infty$, si ha:

(d) se $\beta > 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^\beta}(1+o(1))}{x^{1/2}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{\beta+1/2}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta + 1/2 > 1 \iff \beta > \frac{1}{2}$,

(e) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{x^{1/2}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ non converge,

(f) se $\beta < 0$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x^{1/2}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ non converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta > \frac{1}{2}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > \frac{1}{2}$.

(16) Sia $f(x) := \log(1+x^\beta) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2} \right)$. Per $x \rightarrow 0^+$, si ha:

(a) se $\beta > 0$, $f(x) = x^\beta(1+o(1)) \frac{1}{x^2}(1+o(1)) = \frac{1}{x^{2-\beta}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge $\iff 2-\beta < 1 \iff \beta > 1$,

(b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{\log 2}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ non converge,

(c) se $\beta < 0$, $f(x) = \beta \log x(1 + o(1))\frac{1}{x^2}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ non converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge $\iff \beta > 1$. Per $x \rightarrow +\infty$, si ha:

(d) se $\beta > 0$, $f(x) = \beta \log x(1 + o(1))\frac{2}{x^2}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta > 0$,

(e) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{2 \log 2}{x^2}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge,

(f) se $\beta < 0$, $f(x) = x^\beta(1 + o(1))\frac{2}{x^2}(1 + o(1)) = \frac{2}{x^{2-\beta}}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff 2 - \beta > 1 \iff \beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > 1$.

(17) Sia $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}(x+7x^\beta)}$. Per $x \rightarrow 0^+$, si ha:

(a) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{1}{-\sqrt[3]{2x}}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ non converge per ogni $\beta > 1$,

(b) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{1}{-8\sqrt[3]{2x}}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ non converge,

(c) se $\beta < 1$, $f(x) = \frac{1}{-7\sqrt[3]{2x^\beta}}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge $\iff \beta < 1$. Per $x \rightarrow 2$, si ha $f(x) = \frac{1}{(2+7 \cdot 2^\beta)\sqrt[3]{x-2}}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_1^3 f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Per $x \rightarrow +\infty$, si ha:

(d) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{1}{7x^{\beta+1/3}}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta + 1/3 > 1 \iff \beta > \frac{2}{3}$,

(e) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{1}{8x^{4/3}}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ converge,

(f) se $\beta < 1$, $f(x) = \frac{1}{x^{4/3}}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta < 1$.

(18) Sia $f(x) := \frac{|\sin \frac{1}{\sqrt{x}}|^\beta}{\sqrt{x} \log(1 + \sqrt[3]{x})}$. Per $x \rightarrow 0^+$, si ha $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x} \log(1 + \sqrt[3]{x})} = \frac{1}{x^{5/6}(1+o(1))}$, da cui segue che l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta \geq 0$. Per $x \rightarrow +\infty$, si ha:

(a) se $\beta > 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^{\beta/2}}(1+o(1))}{\frac{1}{3}x^{1/2} \log x(1+o(1))} = \frac{3}{x^{(\beta+1)/2} \log x}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff (\beta + 1)/2 > 1 \iff \beta > 1$,

(b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{3}{x^{1/2} \log x}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ non converge.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge $\iff \beta > 1$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > 1$.

(19) Sia $f(x) := \frac{x(1-\cos x)e^{-x}}{\arctg(x^\beta)}$. Per $x \rightarrow 0^+$, si ha:

(a) se $\beta > 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3(1+o(1))}{x^\beta(1+o(1))} = \frac{1}{2x^{\beta-3}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge $\iff \beta - 3 < 1 \iff \beta < 4$,

(b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3(1+o(1))}{\frac{\pi}{4}}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge,

(c) se $\beta < 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3(1+o(1))}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge $\iff \beta < 4$. Per $x \rightarrow +\infty$, si ha $0 \leq f(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\arctg(x^\beta)} =: g(x)$ e

(d) se $\beta > 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{x^\beta(1+o(1))} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta > 0$,

(e) se $\beta = 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{\frac{\pi}{4}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge,

(f) se $\beta < 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta < 4$.

(20) Sia $f(x) := \frac{2x+\sin(x^\beta)}{e^x-\cos(x^\beta)}$. Per $x \rightarrow 0^+$, e $\beta > 0$, $f(x) = \frac{2x+x^\beta+o(x^\beta)}{1+x+o(x)-1+\frac{1}{2}x^{2\beta}+o(x^{2\beta})}$, per cui si ha:

(a) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{2x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 2(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta > 1$,

(b) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{3x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 3(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge ,

(c) se $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \frac{1}{x^{1-\beta}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge $\iff 1 - \beta < 1 \iff \beta > 0$,

(d) se $\beta = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x^{1/2}(1+o(1))}{\frac{3}{2}x(1+o(1))} = \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/2}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge,

(e) se $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{\frac{1}{2}x^{2\beta}(1+o(1))} = \frac{2}{x^\beta}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge $\iff \beta < 1$,

(f) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{2x+\sin 1}{e^x-\cos 1} = \frac{\sin 1}{e-\cos 1}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge per ogni $\beta \geq 0$. Per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{2x(1+o(1))}{e^x(1+o(1))}$, per cui l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge per ogni $\beta \geq 0$. Allora, l'integrale proposto converge per ogni $\beta \geq 0$. □