

Asintoti, Derivabilità, invertibilità e studi di funzione

1. Studiare il dominio di definizione e gli asintoti delle seguenti funzioni :

(a) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-1}$; $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$; $f(x) = \frac{x^2+3|x|+2}{x-1}$.

(b) $f(x) = \frac{x^3-2x+2}{x^2-3x+2}$; $\frac{x^3-2x+2}{x+2}$.

(c) $f(x) = x + \ln(x)$; $f(x) = x \arctan(x)$; $f(x) = \frac{x}{\arctan(x)}$.

(d) $f(x) = x e^{\frac{-1}{x}}$; $f(x) = x e^{\frac{x+1}{1-x}}$; $f(x) = x e^{\frac{x^2+1}{1-x}}$.

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$; $f(x) = \sqrt{x^2 - 2|x| - 8}$.

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 8}$; $\sqrt[3]{x^3 - 2x - 8}$.

(g) $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+8}{x+9}\right)$; $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+8}{x^2+9}\right)$.

(h) $f(x) = x + x \sin\left(\frac{2}{x}\right)$.

(i) $f(x) = \ln\left(e^{(1+2x-\frac{1}{x+1})} - 1\right)$

(j) $f(x) = x |\ln(1 - e^x)|$; $f(x) = |x + 8| e^{\frac{x+7}{x-1}}$.

(k) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ per $\alpha \in (0, +\infty)$

2. Studiare la continuità e la derivabilità delle funzioni elencate in tutto il loro dominio di definizione e calcolare la derivata nei punti in cui la funzione risulta derivabile.

(a) $f(x) = \sin(|x|)$, $f(x) = x \sin(|x|)$

(b) $f(x) = \sin(x-1) \sqrt[3]{x^2-1}$, $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x)}$

(c) $f(x) = \sin(|x-1|) - |x-1|$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{1 - \cos(x)}$, $x \in [-\pi, \pi]$

(e) $f(x) = (1 - \cos(x))^{3/5}$, $x \in [-\pi, \pi]$

(f) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(|x|)\right)^{3/5}$, $x \in [-\pi, \pi]$

(g) $f(x) = |\sin(x^2 - 4)| \ln(3 - x)$, $f(x) = \sin(|x| - 2) \ln(3 - x)$

(h) $f(x) = \arcsin(e^x)$ (usare la relazione: $\arcsin(x) = \pi/2 - \arcsin(\sqrt{1-x^2})$, $x > 0$).

(i) $f_1(x) = \begin{cases} \sin(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(j) $f_2(x) = \begin{cases} x \sin(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(k) $f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(l) $f_4(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(m) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) + \alpha x & x > 0 \\ x e^{-x} & x \leq 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(n) f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$(o) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

3. Trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che le seguenti funzioni risultino derivabili

$$(a) f(x) = \begin{cases} \sqrt{e^{x-1} + 1} & x > 1 \\ \alpha x + \beta x^2 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \arctan(\alpha(x^2 - 1)) & x > 1 \\ \beta + \ln(1 + x^2) & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \sqrt{\cosh(x)} & x \geq 0 \\ \alpha + \beta x & x < 0 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x & x \geq \alpha \\ (x-\alpha)^2 + \beta x(x-\alpha) & x < \alpha \end{cases}$$

4. Studiare il grafico delle seguenti funzioni (dominio ed asintoti; continuità e derivabilità; intervalli di monotonia; max/min locali e assoluti; immagine; grafico della funzione)

$$(a) f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2+2}{x-1} + \ln(x-1)$$

$$(d) f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

$$(e) f(x) = \sqrt[2]{x^2 - 5x - 36}$$

$$(f) f(x) = \sqrt[2]{|x^2 - 5x - 36|}$$

$$(g) f(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{x}$$

$$(h) f(x) = \frac{x|x| - 2x - 8}{x+6}$$

$$(i) f(x) = \frac{|x-3|}{x^2+4}$$

$$(j) f(x) = x e^{\arctan(x)}, \quad f(x) = x^2 e^{\arctan(x)}$$

$$(k) f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

$$(l) f(x) = \frac{\ln(x)}{1+\ln(x)}$$

$$(m) f(x) = x(3 - (\ln(x))^2)$$

$$(n) f(x) = \ln(1+x^2) - \arctan(x) + x$$

$$(o) f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- (p) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+5} e^{\frac{1}{x}}$
- (q) $f(x) = x^{\ln(x)}$
- (r) $f(x) = \arctan(|x^2 - 1|)$
- (s) $f(x) = x e^{1/\ln(x)}$

5. Studiare gli insiemi in cui sono invertibili le seguenti funzioni e calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto di coordinate $y_0 = f(x_0)$ indicato nell'esercizio.

- (a) $f(x) = x + \arctan(x)$, $x_0 = 1$
- (b) $f(x) = x \arctan(x)$, $x_0 = -1$
- (c) $f(x) = \ln(x) + \frac{x-2}{x+6}$, $x_0 = 2$
- (d) $f(x) = e^x + \arctan(x)$, $x_0 = 0$

Esempi di studio del grafico di una funzione

1) Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}.$$

- a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui.
- b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
- c) Tracciare il grafico della funzione.

N.B. non si richiede lo studio della derivata seconda della funzione.

Svolgimento.

a) La funzione è definita in $(0, +\infty)$ in quanto $(x+2)^2 \geq 0$ e $|\ln(x)| \geq 0$. Quindi l'unica condizione che definisce il dominio della funzione $f(x)$ è il dominio del logaritmo. Per quanto riguarda gli asintoti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|} = \sqrt{4 + |\ln(x)| + o(1)} = +\infty.$$

Quindi in 0 c'è un asintoto verticale. Mentre per $x \rightarrow +\infty$ si osservi che

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|} &= |x+2| \cdot \sqrt{1 + \frac{|\ln(x)|}{(x+2)^2}} \\ &= (x+2) \cdot \left(1 + \frac{|\ln(x)|}{2(x+2)^2} + o\left(\frac{|\ln(x)|}{(x+2)^2}\right) \right) \\ &= (x+2) + \frac{|\ln(x)|}{2(x+2)} + o\left(\frac{|\ln(x)|}{(x+2)}\right) \\ &= x+2 + o(1) \end{aligned}$$

Quindi la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

b) Per quanto riguarda la derivabilità si osservi che nella definizione di $f(x)$ compaiono sia la funzione $|x|$ che la funzione \sqrt{x} , che sono funzioni derivabili nel loro dominio tranne che nel punto $x = 0$. Si osservi che l'argomento del modulo si annulla nel punto $x = 1$, mentre l'argomento della radice non si annulla mai. Di conseguenza per tutti gli $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ la funzione $f(x)$ risulta derivabile ed in tale regione la derivata può essere calcolata usando le regole di derivazione. Di conseguenza studieremo la monotonia di $f(x)$ per tutti gli $x \neq 1$ studiando il segno della derivata di $f(x)$. Mentre di seguito studieremo la derivabilità di $f(x)$ in $x = 1$.

x ≠ 1 In questa regione

$$f'(x) = \frac{2x + 4 + \operatorname{sgn}(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}}{2 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}} = \frac{2x^2 + 4x + \operatorname{sgn}(\ln(x))}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}}$$
$$= \begin{cases} \frac{2x^2 + 4x + 1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}}, & x > 1; \\ \frac{2x^2 + 4x - 1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}}, & 0 < x < 1; \end{cases}$$

dove $\operatorname{sgn}(\ln(x))$ indica la funzione segno di $\ln(x)$:

$$\operatorname{sgn}(\ln(x)) = \begin{cases} 1, & \ln(x) > 0 \iff x > 1; \\ -1, & \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1. \end{cases}$$

In entrambi i casi il denominatore è sempre positivo. Quindi lo studio del segno della derivata prima dipende esclusivamente dal numeratore. In particolare

x > 1 Il segno di f' è quello $2x^2 + 4x + 1$. Le radici dell'equazione $2x^2 + 4x + 1 = 0$, sono $x_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$. Sono tutte e due negative. Quindi $f'(x) > 0$ per $x > 1$.

x < 1 Il segno di f' è quello $2x^2 + 4x - 1$. Le radici dell'equazione $2x^2 + 4x - 1 = 0$, sono $x_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$. In questo caso una radice è negativa. Per l'altra radice si ha

$$0 < \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} < 1$$

Quindi $f'(x) < 0$ per $0 < x < \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$ e $f'(x) > 0$ per $\frac{-2 + \sqrt{6}}{2} < x < 1$.

Riassumendo

$$f'(x) \text{ è } \begin{cases} < 0, & 0 < x < \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}; \\ = 0, & x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}; \\ > 0, & \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} < x < 1; \\ > 0, & x > 1 \end{cases} \implies f(x) \text{ è } \begin{cases} \text{decescente} & 0 < x < \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}; \\ \text{crescente} & \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} < x < 1; \\ \text{crescente} & x > 1 \end{cases}$$

In particolare $x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$ è un *minimo relativo* (assoluto, in realtà) di $f(x)$.

x < 1 Rimane da discutere la derivabilità della funzione in $x = 1$. Dal momento che la funzione è continua in 1 e le derivate esistono in un'intorno di 1 possiamo utilizzare il corollario del teorema di Lagrange il quale afferma che se il limite destro/sinistro delle derivate esiste finito o infinito allora coincide con la derivata destra/sinistra della funzione. Osservando che

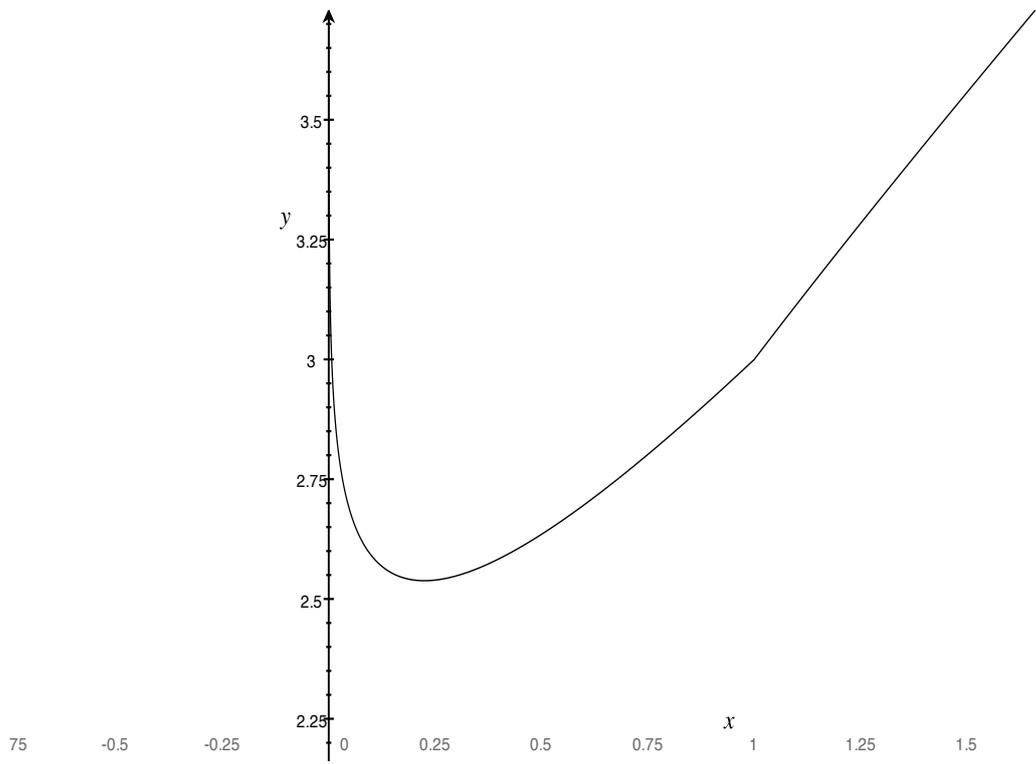
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 4x - 1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}} = \frac{5}{6} = f'_-(1),$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 4x + 1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}} = \frac{7}{6} = f'_+(1),$$

si ha che $f'_+(1) \neq f'_-(1)$. Quindi la funzione non è derivabile in 1.

c) Per quanto riguarda il grafico della funzione si ha



2) Data la funzione

$$f(x) = (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x}$$

- Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui/orizzontali.
- Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
- Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento

a) Il dominio della funzione è dato dal sistema

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-1) \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

Quindi gli asintoti vanno studiati a $\pm\infty$ e in 0 punto di frontiera del dominio. Si osservi che per $x \rightarrow 0^-$ si ha che $-1/x \rightarrow \infty$, quindi per il limite notevole potenze/esponenziali si ha che

$$f(x) = (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x} = -x e^{-1/x} (1 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$$

Quindi 0^- è un asintoto verticale. Inoltre per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x} = |x|(1 - 1/x)^{1/2} e^{-1/x} = |x|(1 - 1/2x + o(1/x))(1 - 1/x + o(1/x)) \\ &= |x|(1 - \frac{3}{2x} + o(1/x)) \end{aligned}$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2} + x + o(1), & x \rightarrow +\infty, \\ \frac{3}{2} - x + o(1), & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Quindi a $+\infty$ l'asintoto obliquo a $+\infty$ ha equazione $y = -\frac{3}{2} + x$. L'asintoto a $-\infty$ ha equazione $y = \frac{3}{2} - x$.

b) La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ perché composizione somma e prodotto di funzioni derivabili in tale insieme. In particolare

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-1/x} \frac{2x-1}{2(x^2-x)^{1/2}} + e^{-1/x} \frac{1}{x^2} (x^2-x)^{1/2} = \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}} (2x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x) \\ &= \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}} (2x^3 + x^2 - 2x) = \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}} x(2x^2 + x - 2). \end{aligned}$$

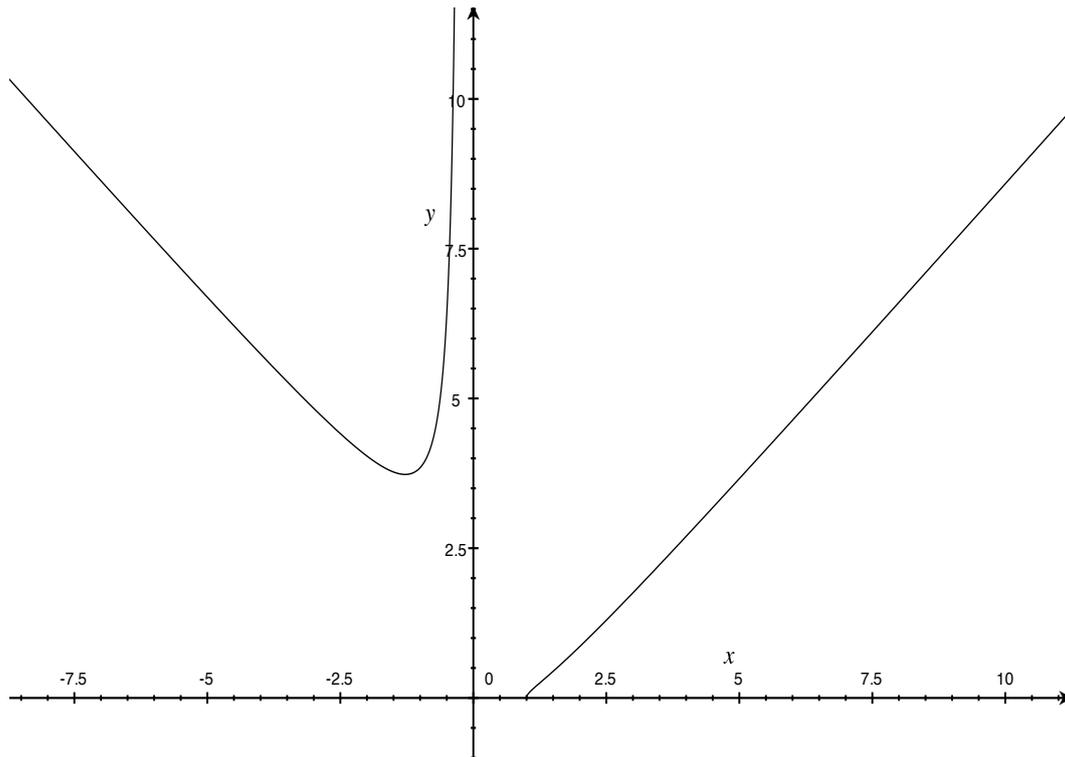
Il segno della derivata prima dipende dal prodotto di x per il polinomio di secondo grado $(2x^2 + x - 2)$, le cui radici sono $x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ e da x . Si osservi che $0 < \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 1$ quindi tale radice cade fuori dal dominio di definizione. Quindi il segno di f' ha

$$f'(x) = \begin{cases} - & 0 & + & + \\ (-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{4}) & \frac{-1-\sqrt{17}}{4} & (\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, 0) & (1, +\infty) \end{cases}$$

Di conseguenza per quanto riguarda la monotonia della funzione si ha

$$f(x) = \begin{cases} \searrow & \nearrow & \nearrow \\ (-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{4}) & (\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, 0) & (1, +\infty) \end{cases}$$

Quindi $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ è un minimo relativo. Il grafico si evince dalla monotonia dagli asintoti e dal fatto che $f(x)$ è sempre ≥ 0 :



Per quanto riguarda la derivabilità in 1^+ si osservi che la funzione è continua in tal punto. Inoltre

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}} x(2x^2+x-2) = \frac{e^{-1}}{2((x-1))^{1/2}} (1+o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$$

quindi per il corollario del teorema di Lagrange la derivata destra in 1 non esiste. Più precisamente 1 è un punto a tangente verticale.

3) Sia data la funzione

$$f(x) = x \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui.
 b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
 c) Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento

a) Il dominio della funzione è individuato dalla disequazione

$$\frac{4x}{x-2} \geq 0, \quad x \neq 2$$

Da cui si evince che il dominio è l'insieme $D_f = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$. Quindi dovremo studiare l'esistenza di asintoti in 2^+ e $\pm\infty$. Studiamo prima l'esistenza di un asintoto verticale in 2^+ : si osservi che per $x \rightarrow 2^+$ si ha

$$f(x) = x \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{8}}{(x-2)^{1/2}}(1 + o(1)) \rightarrow +\infty$$

Quindi $f(x)$ ha un asintoto verticale in 2^+ . Per quanto riguarda $\pm\infty$ si osservi che per $x \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2x \left(1 + \frac{2}{x-2} \right)^{1/2} = 2x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2}{x-2} + o(x^{-1}) \right) \\ &= 2x + 2 \frac{x}{x-2} + o(x^{-1}) = 2x + 2 + \frac{4}{x-2} + o(x^{-1}) \\ &= 2x + 2 + o(1). \end{aligned}$$

Quindi a $+\infty$ e $-\infty$ sono presenti due asintoti obliqui aventi la stessa equazione

$$\boxed{y = 2x + 2}$$

b) La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Studiamo il segno della derivata in tale insieme per capire la monotonia. Dopodichè studieremo la derivabilità di f in 0.

$$\boxed{x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2} \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{8}{(x-2)^2} = \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{\frac{1}{2}} - x \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4}{(x-2)^2} \\ &= \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{4x}{x-2} - \frac{4x}{(x-2)^2} \right) = \left(\frac{4x}{x-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4}{(x-2)^2} (x^2 - 3x) \end{aligned}$$

Per cui il segno della derivata nella regione in esame dipende dal polinomio di secondo grado $(x^2 - 3x) = x(x - 3)$. Di conseguenza:

$$f'(x) \text{ è } \begin{cases} \textit{crescente} & x \in (-\infty, 0) \\ \textit{decrescente} & x \in (2, 3) \\ 0 & x = 3 \\ \textit{crescente} & x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

Quindi il punto $x = 3$ è un minimo relativo.

$$\boxed{x = 0}$$

Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si osservi che la funzione è continua in 0 perchè composizione di funzioni continue. Si osservi inoltre che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 .$$

Per il corollario del teorema di Lagrange si ha che f è derivabile in 0 da sinistra con derivata $f'_-(0) = 0$.

c) Usando i risultati di sopra si traccia il seguente grafico:

