Successioni

1. Provare che le seguenti disuguaglianze sono verificate definitivamente

   (a) $n^2 + 2n > 10n$

   (b) $\sqrt{3n^2 + 100} < 2n - 10$

   (c) $\sqrt{16n^2 - 100} > \pi n + 100$

2. Calcolare limiti delle seguenti successioni e stabilire se i limiti sono raggiunti per eccesso o per difetto:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n-100}{n^2+2}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-4)(n-6)(n-100)}{n^4}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-100}$

   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n}$

3. Dire se esistono i limiti delle seguenti successioni :

   (a) $x_n = \frac{(-1)^n(n+1)!+56\cdot 5^n}{n!\cdot n}$

   (b) $x_n = \cdot \frac{15\cdot n^2+5\cdot 3^n}{(-1)^n 6^n - n^6}$

4. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti sucessioni. Se sono infinite o infinitesime calcolarne, se esiste, l'ordine. Se il limite è finito determinare se il limite r̀aggiunto per eccesso o per difetto.

   (a) $\sqrt{n^3 + 8^2} \cdot \frac{6n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n(n+8)}$; $\frac{\left(2n^5 3^n + 5n^{10}\right)^2}{\sqrt{81^n + 5n^6}}$;

   (b) $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} + 2n^4$; $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} - n^4$;

   (c) $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} - 2n^4$; $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} + 2n^4$;

   (d) $\frac{(n+1)^n\, n^2 + (n+3)!\, n^2}{n^n + 6} \cdot \left(\sqrt{9n^8 + n^2} - 3n^4\right)$;

   (e) $\frac{n^{2n}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)}{(n+1)^n + 2^n n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^n}$; $\frac{\sqrt{n^{16}+2n^6+n^4}}{n^2} - \frac{n^4+1}{n^2}$;

   (f) $n^6 \cdot \left(\sqrt{n^{12} + 2n^2 + 1} - n^2\left(n^4 + 1\right)\right)$;

   (g) $\frac{\ln(n^n) - n^2 + \ln(n!) - n^3\ln(n)}{\ln(n^3) + n^{-3} - \ln(n)} \cdot \left(4n^{-3} + 5^{-n}\right)$;

   (h) $\frac{(n+2)^5 - (n-2)^5}{4n^4 + \sqrt{n}n^2}$;

   (i) $\left((-1)^n n^2 + n\right)\left(4n^{-3} + 5^{-n} + (-1)^n\, 3n^2\right)$;

5. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti sucessioni. Se sono infinite o infinitesime calcolarne, se esiste, l'ordine. Se il limite è finito determinare se il limite raggiunto per eccesso o per difetto.

   (a) $\left(\frac{n!+100^n+n^{1000}}{(n-1)!+6+8^{-n}}\right) \cdot \frac{2}{4n}$

   (b) $\left(\frac{n!-4n^4}{2^n}\right) \cdot ((n+1)!)^{-1}$

   (c) $\left(\frac{(n+1)!-4n^2-2}{(3/2)^n-6n^8}\right) \cdot \left(\frac{-2^n+n^{100}}{2 \cdot n!+5n}\right)$

   (d) $((n!)^{-1} - 2n^{-4} + n^{-n}) \cdot (3n^4+5) \cdot (n^{-2} + 5n^{-1/2} + 8)$

   (e) $\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot (2^{-n}+8\sqrt{n}\, 8^n+5)}{2^n 2^{2n}}$

   (f) $\left(\frac{n^{n-2}+n}{4 \cdot n} - \frac{4 \cdot n^2+n^{n-1}}{4 \cdot n^2}\right)$

   (g) $\frac{n^{-4}-5\,n^{-6}}{6n^{-6}+2n^{-8}} - \frac{n^2}{6}$

   (h) $\left(\frac{(n+2)!-4n^2-2}{n^2 2^n-6n^8}\right) \cdot \left(\frac{-2^n+n^{100}}{2 \cdot n!+5n}\right)$

   (i) $\left(\frac{2 \cdot n!-4 \cdot 3^n}{3 \cdot n^n+18 \cdot n^2}\right) \cdot \left(\frac{-(n+1) \cdot n^n + \cdot (n+1)!}{-2 \cdot (n+1)!+3}\right)$

   (j) $\left(\frac{4^n-3^n \cdot n^2}{3 \cdot n^{-2}+18 \cdot (n!)^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{4^{-n}-5 \cdot (n!)^{-1}}{5 \cdot 3^n+26 \cdot 2^n}\right) \cdot \frac{3^n}{2 \cdot n^2}$

   (k) $\left(\frac{n^{n-2}+n}{4 \cdot n+\sqrt{n}} - \frac{4 \cdot n^2+n^{n-1}}{4 \cdot n^2}\right)$

   (l) $\frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+5}-(n+6)}{-n+\sin(n)+\ln(n^{\sqrt{n}})}$

   (m) $\frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+5}-(2n+6)}{-n+\sin(n)}$

   (n) $\frac{n^2+3^{-n}+6}{(-1)^n\, n+\sqrt{n}}$

6. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni:

   (a) $\frac{4^n\, n^2}{6^n}$; $\frac{(n-10)!}{100^n}$; $\frac{(n+100)!}{n^{(n-10)}}$

   (b) $\frac{(n-4)!}{(7^n)^{300}}$; $\frac{n^n}{(2n)!}$; $\frac{(2n)!}{3^n\, n^n}$

   (c) $\frac{n!\, 4^n}{n^n}$; $\frac{(n+6)!\, 2^n}{n^n}$; $\frac{(n-3)!}{n^{100}} \left(\frac{1}{100}\right)^n$

   (d) $\frac{(n!)^2}{n^n}$; $\frac{n^n}{(2^n)^n}$; $\frac{(2n)!}{(2^{n^2})}$

7. Disporre in ordine di infinito/infinitesimo crescente le seguenti successioni:

   (a) $n^4\, 5^n$, $n^{-3} 6^n$, $\frac{n!}{(n-5)!}$.

   (b) $(2^n)^2$, 2^{n^2} , $\left(\frac{(2n)!}{(2n-1)!}\right)^n$.

   (c) 2^{-n} , $(\frac{2}{3})^n$, $\frac{n^5}{3^n}$.

   (d) $(\sqrt{4n^4+n+2} - 2n^2)$, $(\log_{10}(n))^{-3} + 5n^{-2}$, $(-1)^n \log_{10}(n)\, n^{-2}$

(e) $2^{n\arctan(n)}$, $n^{\ln(n)}$, $\ln^n(n)$.

8. Trovare sup/max e inf/min dei seguenti insiemi:

   (a) $\left\{\frac{n-1}{n^2-4} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}\right\}$

   (b) $\left\{\sqrt{1-\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$

   (c) $\left\{\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}} - 1 \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$

   (d) $\left\{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}} + 2 \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$

   (e) $\left\{\frac{n^2+|n-4|}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

   (f) $\left\{\frac{|n-12|-8}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$

   (g) $\left\{\frac{(-1)^n n-12}{n+6} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$

   (h) $\left\{(-1)^n n^2 - 11n + 10 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

   (i) $\left\{n^2 + (-1)^n 11n + 10 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

   (j) $\left\{\frac{n\sin(2/3\pi n)-6}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

   (k) $\left\{n^{\frac{(-1)^n}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$

9. Data la successione
$$x_n = \left(\frac{n^{10}+6}{n!+n^2}\right)^n$$
stabilire quali fra le seguenti successioni è sottosuccesione di x_n:

$$a_n = \left(\frac{(3n)^{10}+6}{(3n)!+(3n)^2}\right)^{3n}$$
$$b_n = \left(\frac{(n+7)^{10}+6}{(n+7)!+(n+7)^2}\right)^{n+7}$$
$$c_n = \left(\frac{(n-4)^{10}+6}{\frac{(n-2)!}{(n-2)(n-3)}+(n-7)^2}\right)^{n-4}$$
$$d_n = \left(\frac{(2n)^{10}+8}{(2n)!+4n^2}\right)^{2n}$$
$$e_n = \left(\frac{(5n)^{10}+6}{(5n)!+30n^2}\right)^{n}$$
$$f_n = \left(\left(\frac{(3n)^{10}+6}{(3n)!+9n^2}\right)^{n}\right)^3$$

10. Utilizzando il teorema che lega l'esistenza del limite di una successione a quello del limite delle sue sottosuccesioni calcolare i seguenti limiti

    (a) $\lim_{n\to\infty}(n^2+7n+5)^{\frac{1}{2n^2+14n+10}}$

(b) $\lim_{n\to\infty}(n+\sin(n))^{-\frac{3}{n+\sin(n)}}$

(c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{4n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

11. Utilizzare il teorema del confronto o il teorema che lega l'esistenza del limite di una successione a quello del limite delle sue sottosuccesioni per stabilire quali delle succesioni che seguono sono regolari

(a) $\left(\frac{(-1)^n\,n^2+5}{\sqrt{n}+6}\right)$

(b) $(-1)^n\cdot\left(\frac{n^2+5}{n^3+6}\right)$

(c) $\frac{(-1)^n\,n+\ln(n)}{n+\sqrt[n]{n}}$

(d) $\frac{\sin(n\,\pi/2)\,n^4+n^2}{n^4\ln(n)+n^2}$

(e) $\frac{\sin(n\,\pi/2)\,n^4+n^2}{n^4+n^2}$

(f) $\frac{\sin(n\,\pi/2)\,n^4+4n^4+n^2}{n^4+n^2}$

(g) $\frac{4^{n(-1)^n}+n^3}{n^4+3^n}$

(h) $\frac{4^{n(-1)^n}+n^3}{n^4+5^n}$

(i) $n^{\frac{(-1)^n}{n}}$

12. Determinare punti di accumulazione, punti interni, punti di frontiera e punti isolati dei seguenti insiemi

(a) $\left\{(-1)^n\frac{n}{n+2}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

(b) $\left\{(-1)^n\frac{n}{n+2}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

(c) $\left\{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

13. Studiare il dominio di definizione delle seguenti funzioni e calcolarne l'insieme dei punti di accumulazione

(a) $\ln(|x-2|-4)$

(b) $\ln(|4-|x-2||)$

(c) $e^{\sqrt{x^2+1}}$

(d) $\arcsin(\ln(x^2-1))$

(e) $\sqrt{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-1}$

(f) $\sqrt{\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)-1}$

(g) $\frac{\ln(x-1)}{2^{x^2}-2}$

(h) $\frac{1}{\ln(x)+1}$

14. Studiare la continuità in tutto il dominio di definizione delle funzioni elencate

(a) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ , & x \neq 0 \ , \\ 1 & x = 0 \ . \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \ , & x \neq 0 \ , \\ 1 & x = 0 \ . \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x}} \ , & x \neq 0 \ , \\ 0 & x = 0 \ . \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x^2}} \ , & x \neq 0 \ , \\ 0 & x = 0 \ . \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)(x^2-(\pi/2)^2)}{x} \ , & x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2) \ , \\ -(\pi/2)^2 & x = 0 \ , \\ -2 & x = \pi/2 \ , \\ 2 & x = -\pi/2 \ . \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \ , \\ 1 & x = 0 \ . \end{cases}$