Limiti di funzioni e continuità

1. Studiare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x^{-1}-6x^{3/2}}{5x-8x^2+10x^{-1}}$ $[-\frac{3}{8}]$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^{1/2}-9x}{5x-8x^{1/2}+10x^2}$ $[\frac{9}{5}]$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^{-2}+x^{1/2}-9x}{5x-8x^{3/2}+10x^2} \cdot (6x^5-7x^4+8x^3)$ $[\frac{16}{5}]$

   (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+6n^{-1}-6n^{3/2}}{(5n-n^{1/2}+10n^{-1})\log_2(4^{n+\sqrt{n}})}$ $[\frac{1}{10}]$

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^{-2}+x^{1/2}-9x}{5x-8x^{3/2}+10x^2} \cdot (6x^5-7x^4+8x^2)$ $[\nexists]$

   (f) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+x-6)\log_2(x^2)}{3(x-2)-(x-2)^{1/3}}$ $[0]$

   (g) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+x-6)-2(2-x)}{3(x-2)-(x-2)^{3/2}}$ $[7/3]$

   (h) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n^{-1}-8n^3}{2n^2-8n} - \frac{n^{1/2}-n^{-1}-4n^2}{n-8n^{1/2}}$ $[+\infty]$

2. Studiare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \log_{10}\left(\frac{3x^2+5x^{-1}}{-5x+3x^2}\right) + \frac{2x^3}{3x^2+x^3}$ $[2]$

   (b) $\lim_{n\to+\infty} \log_{10}\left(\frac{3n^2+5n^{-1}}{-5n+3n^4}\right) + \frac{2n^3}{3n^2+n^3}$ $[-\infty]$

   (c) $\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{3n^2+5n^{-1}}{-5n+3n^2}\right) - \frac{2n^2}{3n^2+n^3}$ $[\pi/4]$

   (d) $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\log_3(9^{-n})}{n+1} \cdot \arctan\left(\frac{3n^2+5n^{-1}}{-5n+3n^2}\right)\right)$ $[-1]$

   (e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{1+x}$ $[0^-]$

   (f) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x}-\sqrt{1+x}$ $[+\infty]$

   (g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log_2(1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x})}$ $[-\infty]$

3. Calcolare i seguenti limiti e nel caso di infiniti o infinitesimi stabilire se esiste un ordine

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x^2)(\cos x-1)}{x(\sqrt[3]{1-x^3}-1)}$ $[-9/2]$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos(x)-e^x)}{\arctan(x)-\sin(x^2)}$ [0,ordine 1]

   (c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x+x^4)}{\cos(x^{3/2})-1}$ [-∞, ordine 2]

   (d) $\lim_{x\to 3} \frac{\log(1-(x-3)^2)+(x-3)^4}{2(x-3)\tan(x-3)}$ [-1/2]

   (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^2}\ln(\cos(x^{-2}))}{\tan(2x^{-2})}$ [-1/4]

   (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^2}\ln(\cos(x^{-2}))}{\arctan(2x^{-2})+e^{-x}}$ [-1/4]

   (g) $\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{-1}{x^2})(\sin(x)+x)$ $[0, \text{ordine} = 1]$

(h) $\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{-1}{x})\,(x\sin(x)+x)$ [$\nexists$]

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sqrt[3]{1-x}}{\ln(\sqrt{1+2x^2})}$ [$\nexists$]

(j) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-\sqrt[3]{1-x}}{\ln(\sqrt{1+2x^2})}$ [$+\infty$]

(k) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-\sqrt[3]{1-x}}{\ln(\sqrt{1+2x})}$ [4/3]

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x^2+x^4}-1-3x^3}{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}-1}$ [-4]

(m) $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(2x)-\ln(\sqrt{x}+x^3)}{\sin(x)+\ln(4x+7x^2)}$ [1/2]

(n) $\lim_{x\to+\infty}(e^{4x}+x^{10})(1-\cos(e^{-2x})+e^{-5x})$ [1/2]

(o) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\arctan(x^2)-\pi/2)(\sqrt{x^6+x^2})}{\sqrt{x}\ln(x^6)+3x}$ [-1/3]

4. Usando le note formule di approssimazione delle funzioni in $x_0=0$ e le loro proprietà algebriche, provare le seguenti relazioni di approssimazione per $x\to x_0\in\mathbb{R}$

(a) $\ln(x)=\ln(x_0)+\frac{1}{x_0}(x-x_0)+o(x-x_0)\quad,\quad x_0\in(0,+\infty)$.

(b) $e^x=e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0)+o(x-x_0)\quad,\quad x_0\in\mathbb{R}$.

(c) $\sin(x)=\sin(x_0)+\cos(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ ,\quad x_0\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

(d) $\cos(x)=\cos(x_0)-\sin(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ ,\quad x_0\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

(e) $x^\alpha=x_0^\alpha+\alpha x_0^{(\alpha-1)}(x-x_0)+o(x-x_0)\quad,\quad \alpha\neq 1,0$ e $x_0\in(0,+\infty)$.

(f) $\sinh(x)=\sinh(x_0)+\cosh(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ ,\quad x_0\in\mathbb{R}$.

(g) $\cosh(x)=\cosh(x_0)+\sinh(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ ,\quad x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5. Provare le seguenti relazione

(a) $x^x=1+x\ln(x)+o(x\ln(x))$ per $x\to 0^+$

(b) $(\cos(x))^{x^{-1}}=1-\frac{x}{2}+o(x)$ pert $x\to 0^+$

6. Calcolare i seguenti limiti e nel caso di limiti infiniti o infinitesimi stabilire se esiste un ordine

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{e^x-e^2}$ [$80e^{-2}$]

(b) $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{4}{x^2})(\sin(2x)^2+x^2+\ln(x^5))$ [4]

(c) $\lim_{x\to-\infty}\ \sqrt[3]{2\cosh(x^{-2})}-\sqrt[3]{2}$ [0, ordine 4]

(d) $\lim_{x\to 2} \frac{(\log(2)-\log(x))^2}{\log(\cosh(x-2))}$ [0, ordine 1]

(e) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(e^{x-2}-1)}{(x-2)(1-\sqrt[3]{1-(x-2)})}$ [12]

(f) $\lim_{x\to\pi/2}\ \tan(x)$ [$+\infty$, ordine 1]

(g) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{\cos(x-2)}-\frac{e^x}{e^2}}{2\log(x-1)}$ [$-1/2$]

(h) $\lim_{x\to 0^+} x^x$ [1]

(i) $\lim_{x\to 0^+} x^{x^x}$ [0, nessun ordine]

(j) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1+x}{\ln(\cos(x))}$ [$+\infty$, nessun ordine]

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{2x}-1}{4x^2}$ [1/2]

(l) $\lim_{x\to 4} \frac{x^{(x-4)}-1+x-4}{x^3-64}$ [$(\ln(4)+1)/3$]

(m) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{2x}-1}{\sqrt{x}-\cos(x-1)}$ [4]

(n) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}+\arctan(\cos(x)-1)}{\ln(1+x+x^3)-x^2}$ [-∞, ordine 1]

(o) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)^{\arctan(x^{-1})}-1}{x^{-\ln(x)}+x^2}$ [-$\pi/4$]

(p) $\lim_{x\to -\infty} \frac{(\ln(3-x)-\ln(-x))}{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}$ [$-3/2$]

(q) $\lim_{x\to 2^+} \frac{e^{(x-2)}-\sqrt[3]{3-x}}{\cos(x-2)-e^{(x-2)^3}}$ [$-\infty$, ordine 1]

(r) $\lim_{x\to 2^+} \frac{e^{(x-2)}-\sqrt[3]{3-x}}{\cos(x-2)-e^{(x-2)}}$ [-4/3]

(s) $\lim_{x\to +\infty} x\arctan(x)-\pi/2\,x$ [-1]

(t) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)\ln(1-3x^{-1})}{\sin(x^{-2})}$ [$-\infty$, nessun ordine]

(u) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(x)-\cos(x)\ln(x^2)}{\cos(x)-\sqrt{1-3x}}$ [0^-, nessun ordine]

(v) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x^2+x^4)-e^{-1/x}x^{-3}}{\cos(x^{3/2})-1}$ [$-\infty$, ordine 1]

7. Studiare al variare del parametro α i seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(x^3-1)^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} 0 & \alpha<1 \\ 1/6 & \alpha=1 \\ +\infty & \alpha>1 \end{bmatrix}$

(b) $\lim_{x\to +\infty}(e^{\alpha x}-1)x\sin(x^{-1})$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} +\infty & \alpha>0 \\ 0 & \alpha=0 \\ -1 & \alpha<0 \end{bmatrix}$

(c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^\alpha)+x^2}{\ln(\sqrt{x+1})}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} 0 & \alpha>1 \\ 2 & \alpha=1 \\ +\infty & 0\le\alpha<1 \\ \nexists & \alpha<0 \end{bmatrix}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(2\arctan(x^\alpha)-\pi\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} 0 & \alpha>1 \\ -2 & \alpha=1 \\ -\infty & 0<\alpha<1 \\ 0 & \alpha\le 0 \end{bmatrix}$

8. Studiare la continuità delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato.

(a) $f(x) = \begin{cases} (\sqrt{1-(x-2)}-1)\sin(2/x-2) & x > 2\ , \\ 2 - \lg_2(16-2x^2) & x \leq 2\ . \end{cases} \quad , \quad x_0 = 2$ [*si*]

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & x > 4\ , \\ \arctan(x-4) + x & x \leq 4\ . \end{cases} \quad , \quad x_0 = 4$ [*no*]

9. Studiare al variare del parametro α la continuità delle seguenti funzioni

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+2x^\alpha}-\cos(x)}{x+x^\alpha}\ , & x > 0\ , \\ 2/3 & x = 0\ , \end{cases} \qquad \text{per} \quad \alpha > 0$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^{(\alpha-1)})}{\alpha x}\ , & x > 0 \\ 1/2\ , & x = 0 \\ \frac{\arctan(1/x)}{-\pi}\ , & x < 0\ . \end{cases} \qquad \text{per} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

10. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni si possono estendere per continuità

    (a) $f(x) = \frac{\ln(1+x^{(\alpha-1)})}{\alpha x} \quad , \quad x > 0\ .$

    (b) $f(x) = \frac{\sin(\alpha x^\alpha)+x}{x^2} \quad , \quad x > 0\ .$

    (c) $f(x) = \frac{(\ln(1+x))^\alpha \arctan(\alpha x^{-2\alpha})}{x^2} \quad , \quad x > 0$

Note

Relazioni di approssimazione

Dai limiti notevoli introdotti a lezione ed il teorema limite di funzioni composte possiamo dedurre le seguenti formule di approsimazione.

Sia f una funzione che definitivamente in $y_0 \in \mathbb{R}$ soddisfa la relazione

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k (y - y_0)^k + o(y - y_0)^n$$

e sia $g(x)$ una funzione tale che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \ ,$$

e $g(x) \neq y_0$ definitivamente in x_0. Allora

$$\boxed{(f \circ g)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (g(x) - y_0)^k + o(g(x) - y_0)^n}$$

Si osservi infatti che $f(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k (y - y_0)^k + o(y - y_0)^n$ equivale a dire che la funzione

$$F(y) := \frac{f(y) - \sum_{k=0}^{n} a_k (y - y_0)^k}{(y - y_0)^n} \quad , \quad y \neq y_0$$

ha limite: $\lim_{y \to y_0} F(y) = 0$. Dal teorema del limite di funzione composte si ha

$$\lim_{x \to x_0} (F \circ g)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - \sum_{k=0}^{n} a_k (g(x) - y_0)^k}{(g(x) - y_0)^n} = 0$$

che equivale

$$(f \circ g)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (g(x) - y_0)^k + o(g(x) - y_0)^n \ .$$

Utilizzando la relazione di sopra e le approssimazioni ottenute dai limiti notevoli se $g(x)$ è una funzione tale che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \ ,$$

e $g(x) \neq 0$ definitivamente in x_0 si ha

$$\boxed{\begin{array}{rcl@{\qquad}l@{\qquad}l}
e^{g(x)} & = & 1 + g(x) + o(g(x)) & & x \to x_0 \\[1ex]
\ln(1 + g(x)) & = & g(x) + o(g(x)) & & x \to x_0 \\[1ex]
\sin(g(x)) & = & g(x) + o(g(x)) & & x \to x_0 \\[1ex]
\cos(g(x)) & = & 1 - \frac{1}{2}(g(x))^2 + o(g(x)^2) & & x \to x_0 \\[1ex]
\tan(g(x)) & = & g(x) + o(g(x)) & & x \to x_0 \\[1ex]
\arctan(g(x)) & = & g(x) + o(g(x)) & & x \to x_0 \\[1ex]
(1 + g(x))^{\alpha} & = & 1 + \alpha\, g(x) + o(g(x)) & \alpha \neq 0, 1 & x \to x_0 \\[1ex]
\sinh(g(x)) & = & g(x) + o(g(x)) & & x \to x_0 \\[1ex]
\cosh(g(x)) & = & 1 + \frac{1}{2}(g(x))^2 + o(g(x)^2) & & x \to x_0 \\[1ex]
\tanh(g(x)) & = & g(x) + o(g(x)) & & x \to x_0 \ .
\end{array}}$$