Operazioni sulle funzioni

1. Date le funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 6} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 3x}$$

calcolarne il dominio. Inoltre dati gli insiemi

$$D_1 = [0, +\infty) \ , \quad D_2 = [1, 4] \ , \quad D_3 = [-2, 2]$$

calcolare, le seguenti controimmagini (osservare che la controimmagine dell'unione di insiemi è uguale alla unione delle controimmagini):

(a) $f^{-1}(D_1)$, $f^{-1}(D_2)$, $f^{-1}(D_3)$, $f^{-1}(D_2 \cup D_3)$,

(b) $g^{-1}(D_1)$, $g^{-1}(D_2)$, $g^{-1}(D_3)$, $g^{-1}(D_1 \cup D_2)$.

2. Date le funzioni

$$f(x) = \sqrt{x} \ , \quad h(x) = x^2 + x - 6 \ , \quad g(x) = \log_{10}(x) \ , \quad m(x) = |x| \ , \quad l(x) = x^3 + x \ .$$

Calcolare le seguenti composizioni e i corrispodenti domini

(a) $f \circ h \quad , \quad h \circ f$

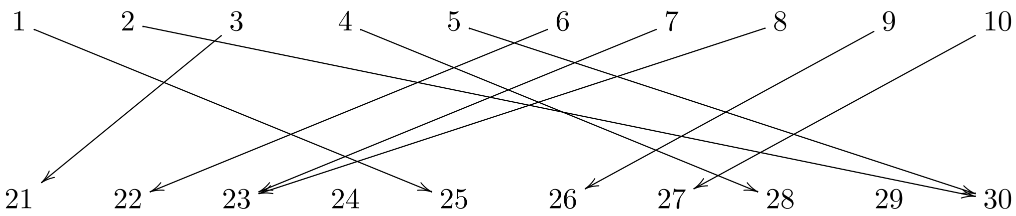
(b) $g \circ h \quad , \quad h \circ g$

(c) $h \circ m \quad , \quad m \circ h$

(d) $g \circ l \quad , \quad l \circ g$

(e) $g \circ h \circ f \quad , \quad f \circ h \circ g \ .$

3. Dati gli insiemi $D := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$ e $Y := \{n \in \mathbb{N} \mid 20 \leq n \leq 30\}$, sia $f : D \to Y$ la funzione definita dal seguente diagramma



Ad esempio questo significa che $f(10) = 27$ ed $f(2) = 30$. Inoltre dati gli insiemi $D_1 := \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $D_2 := \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $D_3 := \{5, 6, 7, 8\}$, siano $f \restriction D_1$, $f \restriction D_2$ e $f \restriction D_3$ le restrizioni della funzione f ai sottoinsiemi D_1, D_2 e D_3, rispettiamente.

(a) Calcolare le immagini delle funzioni f, $f \upharpoonright D_1$, $f \upharpoonright D_2$ e $f \upharpoonright D_3$.

(b) Stabilire quali, tra f, $f \upharpoonright D_1$, $f \upharpoonright D_2$ e $f \upharpoonright D_3$, sono funzioni iniettive.

(c) Stabilire quali, tra f, $f \upharpoonright D_1$, $f \upharpoonright D_2$ e $f \upharpoonright D_3$, sono funzioni invertibili e scrivere attraverso un diagramma le funzioni le inverse.

4. Stabilire, dopo aver tracciato il grafico, quali delle seguenti funzioni è invertibile

(a)
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ -x+4 & x \in [1,2] \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2} & x \in [1,2] \end{cases}$$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1) \\ \sqrt{x} & x \in [1,2] \end{cases}$$

(d)
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ -x+3 & x \in (1,2] \end{cases}$$

5. Verificare che le seguenti coppie di funzioni sono una l'inversa dell'altra

(a) $f(x) = \frac{x^3+4}{5}$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{5x-4}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x+2} \upharpoonright (-2,+\infty)$ e $f^{-1}(x) = \frac{1-2y}{y} \upharpoonright (0,+\infty)$

(c) $f(x) = (x-1)^2 \upharpoonright [1,+\infty)$ e $f^{-1}(x) = 1+\sqrt{x} \upharpoonright [0,+\infty)$

(d) $f(x) = (x-1)^2 \upharpoonright (-\infty,1]$ e $f^{-1}(x) = 1-\sqrt{x} \upharpoonright [0,+\infty)$

(e) $f(x) = x^2-6x+8 \upharpoonright [3,+\infty)$ e $f^{-1}(x) = 3+\sqrt{1+x} \upharpoonright [-1,+\infty)$

6. Utillizzando le proprietà del logaritmo e dell'esponenziale provare le seguenti identità

(a) $\frac{4\log_2(4)}{\log_3(27)+\log_3(9)} = \frac{8}{5}$

(b) $\frac{\log_2(16)-\log_2(4)}{\log_6(2^3\,3^3)} = \frac{2}{3}$

(c) $\log_7(5)\,\log_5(7^4\,7^6) = 10$

(d) $-\log_5((25^6)^{10}) + \log_5(5^4 \cdot 25^3) = -110$

(e) $\frac{\log_2(3)\,(\log_3(16)-\log_3 4)}{\log_6(2^3\,3^3)} = \frac{2}{3}$

7. Risolvere le seguenti disequazioni

(a) $x^2 + |x| - 2 > 2$
(b) $1 < x^2 + |x| - 2 < 2$
(c) $\sqrt{-x^2 + 4} < x + 5$
(d) $1 < \log_2(x^2 - 6x + 5) \leq 2$
(e) $1 < \log_{1/2}(x^2 - 6x + 5) \leq 2$
(f) $3 < e^{2x} - e^x - 12 < 10$
(g) $-2 < \ln(|x| - 5) < 4$
(h) $x^4 + 4x^2 - 5 > 0$
(i) $-x^4 + 4x^2 - 5 > 1$
(j) $0 < \log_3^2(x) + 4\log_3(x) - 3 < 2$

8. Studiare il dominio di definizione, provare (usando la monotonia) l'invertilità e calcolare l'inversa delle seguenti funzioni

   (a) $\log_3(1 + x^3)$
   (b) $\sqrt{4 + 2^x}$
   (c) $\sqrt[3]{6 + \log_5(x)}$

9. Provare che la funzione

   $\log_2(x^2 - 3x + 2)$ è invertibile per $x \geq 2$ e calcolarne l'inversa.

10. Trovare gli insiemi in cui le seguenti funzioni sono invertibili e calcolarne le inverse

    (a) $\cosh(x)$
    (b) $\sqrt{e^{x^2} + 1}$
    (c) $\log_2(x^2 - 3x + 2)$

11. Calcolare l'immagini delle funzioni nei corrispondenti domini o negli insiemi indicati (Vedere esempio a fine foglio degli esercizi)

    (a) $x^2 - 4$
    (b) $x^2 - 4$ per $x \in [-2, 4)$
    (c) $\frac{x-1}{x+5}$
    (d) $\ln(x + 6)$ per $x \in [-2, 0]$
    (e) $2^{x^2} - 8$ per $x \in [0, +\infty)$

Esempio di calcolo dell'immagine. Sia data la funzione

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

calcolare la sua immagine, e calcolare l'immagine dell'intervallo $[0, 2]$.
Svolgimento. Rispondiamo alla prima domanda. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ calcolare la sua immagine equivale a risolvere il seguente problema: trovare $y \in \mathbb{R}$ che risolvono la seguente equazione

$$y = x^2 - 2x - 3 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Questa equazione è equivalente a

$$y = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

e questa è equivalente alla seguente equazione

$$x - 1 = \pm\sqrt{y+4} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \ y \geq 4$$

Quindi vediamo che l'equazione di partenza è risolta per tutti gli $y \geq -4$. Quindi $[-4, +\infty)$ è l'immagine della funzione. Nella seconda domanda si impone una restrizione sui possibili valori della x. Quindi bigogna imporre tale restrizione sull'ultima equazione. Ossia osservando che $x = 1 + \pm\sqrt{y+4}$ abbiamo un sistema di due disequazioni

$$0 \leq 1 + \sqrt{y+4} \leq 2 \quad , \quad 0 \leq 1 - \sqrt{y+4} \leq 2 \quad , \quad -4 \leq y \ .$$

La prima si risolve facilmente osservado che che è equivalente a

$$-1 \leq \sqrt{y+4} \leq 1 \quad , \quad -4 \leq y \ .$$

ma la radice ha immagine positiva quindi la prima disugualgianze è verificata. Per la seconda osservando che abbiamo a che fare con quantità positive e che x^2 èstrettamente crescente intale intervallo si ha

$$\sqrt{y+4} \leq 1 \quad , \quad -4 \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y + 4 \leq 1 \ , -4 \leq y$$

quindi la prima disequanzione ha soluzione in $y \in [-4, -3]$. Per la seconda aggiungendo -1 a tutti i membri e combiando di segno porta a

$$1 \geq \sqrt{y+4} \geq -1 \quad , \quad -4 \leq y \ .$$

La seconda disuguaglianza è sempre verificata. La prima procedendo come nel caso precedente porta a

$$1 \geq y + 4 \quad , \quad -4 \leq y$$

quindi si ottiene lo stesso risultato di prima: $y \in [-4, -3]$. Quindi $f([0, 2]] = [-4, 3]$

Esempio calcolo dell'inversa. Studiare l'invertibilità e calcolarne, dove definite, le inverse della funzione

$$f(x) = \arctan(x^2 - 6x + 8)$$

Svolgimento Vediamo dove la funzione è invertibile. Si osservi che completando il quadrato del polinomio di secondo grado si ha

$$f(x) = \arctan(^2 - 6x + 8) = \arctan(x^2 - 6x + 9 - 1) = \arctan((x-3)^2 - 1)$$

da cui segue, ricordando che $\arctan(x)$ è strettamente crescente, che

$$f_+ : 0 f \restriction [3, +\infty) \ , \ \textit{strettamente crescente} \ ; \ f_- := f \restriction (-\infty, 3] \ , \ \textit{strettamente decrescente}$$

quindi è invertibile su ognuno di questi due intervalli.

Calcolare l'inversa equivale ad esplicitare i punti del dominio x come funzione dei punti dell'immagine della funzione; ossia equivale a risolvere un equazione del tipo

$$y = \arctan(x^2 - 6x + 8) = \arctan((x-3)^2 - 1)$$

cercando se possibile di esplicitare la x come funzione della y. Allora osserviamo

$$y = \arctan((x-3)^2 - 1) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \tan(y) = (x-3)^2 - 1 \\ y \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \tan(y) + 1 = (x-3)^2 \\ y \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{\tan(y) + 1} \\ y \in (-\pi/2, \pi/2) \ , \ \tan(y) \geq -1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{\tan(y) + 1} \\ y \in (-\pi/4, \pi/2) \end{cases}$$

Ora l'indeterminazione del $\pm$ è legata al fatto che la funzione di artenza non è invertibile su tutto il suo dominio ma solo su due inervalli di $\mathbb{R}$. Si vede a questo punto facilmente che

$$f_+ = f \restriction [3, +\infty) \quad , \quad (f_+)^{-1}(y) = 3 + \sqrt{\tan(y) + 1} \ y \in (-\pi/4, \pi/2)$$
$$f_- = f \restriction (-\infty, 3] \quad , \quad (f_-)^{-1}(y) = 3 - \sqrt{\tan(y) + 1} \ y \in (-\pi/4, \pi/2)$$

in quanto nel primo caso l'immagine di $(f_+)^{-1}$ è $[3, +\infty)$ mentre nel secondo caso l'immagine di $(f_-)^{-1}$ è $(-\infty, 3]$