Analisi Matematica II
Serie numeriche

Esercizio 1. Determinare se le serie seguenti convergono (assolutamente o semplicemente)

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}+1)^n\left(\sqrt{n^n+n^{-5}}-\sqrt{n^n-n^{-6}}\right)}{\sqrt{n+n^{-1}}-\sqrt{n-n^{-2}}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{\log n}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+n^2\log n}{n^3}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+n^n}{\binom{2n}{n}}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n-2^{n\log n}}{\binom{3n}{n}}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-n^2\sin^2\frac{1}{n}\right)$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{2}{n}}\right)^{n^3}$

Esercizio 2. Trovare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per cui risultano convergenti le seguenti serie

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+n^2)}{(n+3)^\beta}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+2^n)}{(n+3)^\beta}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\log(1+n^2)}{(1+n^3)^\beta}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\log(1+n^2)}{(1+n^3)^\beta}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\log(1+2^n)}{(1+n^3)^\beta}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\log(1+2^n)}{(1+n^3)^\beta}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta + \log(1+n^2)}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta + \log(1+2^n)}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta \log(1+n^2)}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta \log(1+2^n)}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+n^2))^\beta}$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+2^n))^\beta}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta \log(1+\frac{1}{n^2})}$

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+\frac{1}{n^2}))^\beta}$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta \log(1+2^{-n})}$

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+2^{-n}))^\beta}$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^\beta+1)}$

Esercizio 3. Trovare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui risultano convergenti (semplicemente o assolutamente) le seguenti serie

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n(2n-1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \log n}{1+\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-\frac{1}{2})^n}{\log n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{3^n\sqrt{n^2-1}}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+1)^n}{\sqrt{n^2-1}+3^n}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{n}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{nx}}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}(\sin x)^{n}}{n}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n^{2}-1}}{(x-1)^{n}}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{2}+2)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n}$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (4-3^{x})^{n}\ \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^{2}}\right)$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{1+nx^{2}}$

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^{2}}$

(15) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{x}}$

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{x}(n^{2}+1)}}$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n}}{n^{x}}$

(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2x}-1}{n^{3}+1}$

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{x-2}+n^{4-x^{2}}}{n^{2}}$

(20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[n]{2}\cos\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$

Analisi Matematica II
Serie di funzioni

Esercizio 1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni negli intervalli specificati. Determinare, in seguito, il generico insieme di convergenza uniforme.

(1) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^n)}{n}$, in $\mathbb{R}$,

(2) $f_n(x) = \dfrac{3x+n}{x+n}$, in $[0,+\infty)$,

(3) $f_n(x) = x^n \log(x^n)$, in $(0,1]$, o in $(0,\frac{1}{2}]$,

(4) $f_n(x) = \sqrt[n]{nx^2+1}$, in $[-1,1]$,

(5) $f_n(x) = \dfrac{(n^2-x^2)^2}{1+(n^2-x^2)^2}$, in $\mathbb{R}$,

(6) $f_n(x) = n^{n^x}$, in $[-1,0]$,

(7) $f_n(x) = \dfrac{x}{|x|+\frac{1}{n}} e^{-n|x|}$, in $\mathbb{R}$,

(8) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$, in $[-1,1]$,

(9) $f_n(x) = \Big(\log\big(1+\dfrac{1}{x}\big)\Big)^n$, in $(0,1]$, o in $[\frac{1}{2},1]$,

(10) $f_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n^{x+1}}$, in $[0,1]$,

(11) $f_n(x) = \dfrac{n^{2x}-1}{n^3+1}$,

(12) $f_n(x) = n \sin\Big(\dfrac{e^{-nx^2}}{n}\Big)$, in $[1,\infty)$,

(13) $f_n(x) = \sin\Big(\sqrt{n}\sin\dfrac{x}{n^2}\Big)$, in $[-1,1]$,

(14) $f_n(x) = \Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{n^2}$, in $[-1,0]$,

(15) $f_n(x) = \Big(1-\dfrac{x^2}{n}\Big)^{n^2}$, in $[0,3]$,

(16) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+nx^2}$, in $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$,

(17) $f_n(x) = x^{\log\log n} n^{-x}$, in $[2,\infty)$,

(18) $f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\Big(\dfrac{1}{x^n}\Big) & 0 < x < \frac{1}{\sqrt[n]{\pi}} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$ in $\mathbb{R}$,

(19) $f_n(x) = \begin{cases} n^3|x|^3, & |x| \le \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} < |x| \le 1, \end{cases}$ in $[0,1]$,

(20) $f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{n^x}$, in $[1,2]$,

(21) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, in $[0,2]$.

Esercizio 3. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme delle seguenti serie di funzioni.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{n!}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n(2n-1)}$,

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \log n}{1+\sqrt{n}}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$,

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-\frac{1}{2})^n}{\log n}$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3-x)^n}{3^n\sqrt{n^2-1}}$,

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(x+1)^n}{\sqrt{n^2-1}+3^n}$,

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$,

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^5} x^{n!}$,

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\Big(\frac{2}{3}\,x-1\Big)^n$,

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n^2-1}}{(x+1)^n}$,

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2+2)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$,

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{nx}}$,

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (4-3^x)^n \ \mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}\right)$,

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx^2}$,

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}(\cos x)^n$,

(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(\sin x)^n}{n}$.

Esercizio 4. Determinare gli sviluppi in serie di Taylor, con centro x_0 indicato, delle seguenti funzioni, e determinare il raggio di convergenza della serie ottenute

(1) $f(x) = \sinh(x), \qquad x_0 = 0$,

(2) $f(x) = \cosh(x), \qquad x_0 = 0$,

(3) $f(x) = \cos(x^2), \qquad x_0 = 0$,

(4) $f(x) = \cos(x), \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$,

(5) $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}, \qquad x_0 = 0$,

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad x_0 = 1$,

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \qquad x_0 = 1$,

(8) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}, \qquad x_0 = 0$,

(9) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \qquad x_0 = 0,$

(10) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}, \qquad x_0 = 0,$

(11) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}, \qquad x_0 = 1,$

(12) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^3}, \qquad x_0 = 0,$

(13) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}, \qquad x_0 = 0,$

(14) $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, \qquad x_0 = 0,$

(15) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2x}\log(1+2x), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

Analisi Matematica II
Serie numeriche (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Sia $a_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$. Poiché $a_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \not\to 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

(2) Sia $a_n := \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$. Poiché $a_n = \frac{2}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)} = \frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(3) Sia $a_n := \frac{(\sqrt{n}+1)^n\left(\sqrt{n^n+n^{-5}}-\sqrt{n^n-n^{-6}}\right)}{\sqrt{n+n^{-1}}-\sqrt{n-n^{-2}}}$. Poiché $a_n = (\sqrt{n}+1)^n \frac{n^{-5}+n^{-6}}{\sqrt{n^n+n^{-5}}+\sqrt{n^n-n^{-6}}} \frac{\sqrt{n+n^{-1}}+\sqrt{n-n^{-2}}}{n^{-1}+n^{-2}} = n^{n/2}(1+o(1))\frac{n^{-5}}{2n^{n/2}}(1+o(1))\frac{2\sqrt{n}}{n^{-1}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{7/2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(4) Sia $a_n := (-1)^n \sin\frac{1}{\log n}$. Intanto, $|a_n|$ è (definitivamente) decrescente, perché composizione della successione decrescente $\left\{\frac{1}{\log n}\right\}$ e della funzione crescente $\sin|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$. Inoltre, $|a_n|$ è infinitesima, perché $|a_n| = \sin\frac{1}{\log n} = \frac{1}{\log n}(1+o(1)) \to 0$. Allora, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (non assolutamente) per il criterio di Leibniz.

(5) Osserviamo che $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+n^2\log n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$, e la prima serie converge assolutamente. Occorre, quindi, solo determinare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$. Sia $a_n := (-1)^n \frac{\log n}{n}$. Intanto, $|a_n|$ è (definitivamente) decrescente, perché, posto $f(x) := \frac{\log x}{x}$, si ha $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2} \geq 0 \iff x \in (0, e]$. Inoltre, $|a_n|$ è infinitesima. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (non assolutamente) per il criterio di Leibniz.

(6) Sia $a_n := \frac{n!+n^n}{\binom{2n}{n}}$. Poiché $a_n = \frac{n^n(1+o(1))}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{n^n(n!)^2}{(2n)!}(1+o(1))$, si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{(2n+2)!}(1+o(1)) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)}(1+o(1)) = e(1+o(1))\frac{n^3(1+o(1))}{4n^2(1+o(1))} \to +\infty$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

(7) Sia $a_n := \frac{n^n-2^{n\log n}}{\binom{3n}{n}}$. Poiché $a_n = \frac{n^n(1+o(1))}{\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}} = \frac{n^n\cdot n!\cdot(2n)!}{(3n)!}(1+o(1))$, si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\frac{(3n)!}{(3n+3)!}(1+o(1)) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(n+1)^2(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}(1+o(1)) = e(1+o(1))\frac{4n^4(1+o(1))}{27n^3(1+o(1))} \to +\infty$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

(8) Sia $a_n := 1-n^2\sin^2\frac{1}{n}$. Poiché $a_n = 1-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)^2 = 1-n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3n^4}+o(\frac{1}{n^4})\right) = \frac{1}{3n^2}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(9) Sia $a_n := \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$. Poiché $a_n = e^{n^2\log(1-\frac{2}{n})} = e^{-2n(1+o(1))} = o(\frac{1}{n^{100}})$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(10) Sia $a_n := \left(\frac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{2}{n}}\right)^{n^3}$. Allora $a_n = e^{n^3(\log\cos\frac{3}{n}-\log\cos\frac{2}{n})} \overset{(a)}{=} e^{n^3(-\frac{9}{2n^2}+\frac{2}{n^2})(1+o(1))} = e^{-\frac{5}{2}n(1+o(1))} = o(\frac{1}{n^2})$, dove in (a) si è usato il risultato $\log\cos x = \log\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}x^2(1+o(1))$, $x \to 0$. Quindi, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Sia $a_n := \frac{\log(1+n^2)}{(n+3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{2\log n}{n^\beta}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff \beta > 1$.

(2) Sia $a_n := \frac{\log(1+2^n)}{(n+3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n\log 2}{n^\beta}(1+o(1)) = \frac{\log 2}{n^{\beta-1}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff \beta-1 > 1 \iff \beta > 2$.

(3) Sia $a_n := \frac{n^2+\log(1+n^2)}{(1+n^3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 2 > 1 \iff \beta > 1$.

(4) Sia $a_n := \frac{n^2\log(1+n^2)}{(1+n^3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{2n^2\log n}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{2\log n}{n^{3\beta-2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 2 > 1 \iff \beta > 1$.

(5) Sia $a_n := \frac{n^2+\log(1+2^n)}{(1+n^3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 2 > 1 \iff \beta > 1$.

(6) Sia $a_n := \frac{n^2\log(1+2^n)}{(1+n^3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^3\log 2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{\log 2}{n^{3\beta-3}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 3 > 1 \iff \beta > \frac{4}{3}$.

(7) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta+\log(1+n^2)}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 2 > 1 \iff \beta > 1$.

(8) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta+\log(1+2^n)}$. Poiché $a_n = \begin{cases} \frac{n^2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-2}}(1+o(1)), & \beta > \frac{1}{3}, \\ \frac{n^2}{2n}(1+o(1)) = \frac{1}{2}\,n(1+o(1)), & \beta = \frac{1}{3}, \\ \frac{n^2}{n}(1+o(1)) = n(1+o(1)), & \beta < \frac{1}{3}, \end{cases}$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 2 > 1 \iff \beta > 1$.

(9) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta\log(1+n^2)}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{2n^{3\beta}\log n}(1+o(1)) = \frac{1}{2n^{3\beta-2}\log n}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 2 > 1 \iff \beta > 1$.

(10) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta\log(1+2^n)}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta+1}\log 2}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-1}\log 2}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 1 > 1 \iff \beta > \frac{2}{3}$.

(11) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+n^2))^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{2^\beta n^3(\log n)^\beta}(1+o(1)) = \frac{1}{2^\beta n(\log n)^\beta}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff \beta > 1$.

(12) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+2^n))^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{(\log 2)^\beta n^{3+\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{(\log 2)^\beta n^{\beta+1}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff \beta + 1 > 1 \iff \beta > 0$.

(13) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta\log(1+\frac{1}{n^2})}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}\cdot\frac{1}{n^2}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-4}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta - 4 > 1 \iff \beta > \frac{5}{3}$.

(14) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+\frac{1}{n^2}))^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^3\cdot\frac{1}{n^{2\beta}}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{1-2\beta}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 1 - 2\beta > 1 \iff \beta < 0$.

(15) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta\log(1+2^{-n})}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}\cdot 2^{-n}}(1+o(1)) = \frac{2^n}{n^{3\beta-2}}(1+o(1)) \not\to 0$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ non converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

(16) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+2^{-n}))^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^3\cdot 2^{-n\beta}}(1+o(1)) = \frac{2^{\beta n}}{n}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 2^\beta < 1 \iff \beta < 0$.

(17) Sia $a_n := \frac{1}{n^2(n^\beta+1)}$. Poiché $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^{2+\beta}}(1+o(1)), & \beta > 0, \\ \frac{1}{2n^2}, & \beta = 0, \\ \frac{1}{n^2}(1+o(1)), & \beta < 0, \end{cases}$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. **Alternativamente**, $0 \le a_n \le \frac{1}{n^2}$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, e quindi, per il teorema del confronto, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Sia $a_n := \frac{x^{2n-1}}{n(2n-1)}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|^{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n(2n-1)}} \to x^2 < 1 \iff x \in (-1,1)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se $x \in (-1,1)$. Infine, se $x = \pm 1$, si ha $|a_n| = \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n^2}(1+o(1))$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se $x \in [-1,1]$, e non converge altrove.

(2) Sia $a_n := \frac{x^n \log n}{1+\sqrt{n}}$. Poiché $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}\log(n+1)}{1+\sqrt{n+1}} \frac{1+\sqrt{n}}{|x|^n \log n} = |x| \frac{(1+\sqrt{n})\log n}{(1+\sqrt{n+1})\log(n+1)} \to |x|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-1,1)$. Per $x = 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}$, che non converge. Inoltre, per $x = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{1+\sqrt{n}}$, che converge per il teorema di Leibniz, in quanto $f(x) := \frac{\log x}{1+\sqrt{x}}$, $x \geq 1$, è tale che $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{2(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x}\log x}{2x(1+\sqrt{x})^2} \leq 0$, definitivamente. Quindi la serie converge assolutamente in $(-1,1)$ e semplicemente in $[-1,1)$. Non converge altrove.

(3) Sia $a_n := \frac{(x-\frac{1}{2})^n}{\log n}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = |x - \frac{1}{2}| \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}} \to |x - \frac{1}{2}|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Per $x = -\frac{1}{2}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$, che converge (non assolutamente) per il teorema di Leibniz. Per $x = \frac{3}{2}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e semplicemente in $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Non converge altrove.

(4) Sia $a_n := (-1)^n (n+1) x^n$. Poiché $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+2)|x|^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = |x| \frac{n+2}{n+1} \to |x|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-1,1)$. Per $x = 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$, che non converge. Per $x = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-1,1)$. Non converge altrove.

(5) Sia $a_n := \frac{(3-x)^n}{3^n \sqrt{n^2-1}}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-3|}{3} \frac{1}{\sqrt[2n]{n^2-1}} \to \frac{|x-3|}{3}$, la serie converge assolutamente per $x \in (0,6)$. Per $x = 6$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}$, che converge per il teorema di Leibniz. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(0,6)$ e semplicemente in $(0,6]$. Non converge altrove.

(6) Sia $a_n := \frac{n^2(x+1)^n}{3^n + \sqrt{n^2-1}}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}|x+1|}{3(1+o(1))} \to \frac{|x+1|}{3}$, la serie converge assolutamente per $x \in (-4,2)$. Per $x = -4$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 3^n}{3^n + \sqrt{n^2-1}}$, che non converge, perché $a_n \not\to 0$. Per $x = 2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{3^n + \sqrt{n^2-1}}$, che non converge, perché $a_n \not\to 0$. Quindi la serie converge assolutamente e semplicemente in $(0,6)$. Non converge altrove.

(7) Sia $a_n := n\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(x - \frac{3}{2}\right)^n$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3}\,|x - \frac{3}{2}|\,\sqrt[n]{n} \to \frac{2}{3}\,|x - \frac{3}{2}|$, la serie converge assolutamente per $x \in (0,3)$. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, che non converge. Per $x = 3$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} n$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(0,3)$. Non converge altrove.

(8) Sia $a_n := \frac{2^{n+1}}{e^{nx}}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{e^x}\sqrt[n]{2} \to \frac{2}{e^x} < 1 \iff x > \log 2$, la serie converge assolutamente per $x \in (\log 2, +\infty)$. Per $x = \log 2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 2$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(\log 2, +\infty)$. Non converge altrove.

(9) Sia $a_n := \frac{2^n (\sin x)^n}{n}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = 2|\sin x| \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 2|\sin x|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \mod \pi$. Per $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, che converge (non assolutamente). Per $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente per $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \mod \pi$, e semplicemente per $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi] \mod 2\pi$. Non converge altrove.

(10) Sia $a_n := \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n^2-1}}{(x-1)^n}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{|x-1|}\ \sqrt[2n]{n^2-1} \to \frac{1}{|x-1|}$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Per $x = 2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{n^2-1}$, che non converge. Per $x = 0$ si ha $-\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2-1}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$. Non converge altrove.

(11) Sia $a_n := (n^2+2)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \sqrt[n]{n^2+2} \to \left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1 \iff x \in (-\infty, 0)$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\infty, 0)$. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2+2)$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-\infty, 0)$. Non converge altrove.

(12) Sia $a_n := (4-3^x)^n \operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = |4-3^x| \sqrt[n]{\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}} \to |4-3^x| < 1 \iff x \in (1, \frac{\log 5}{\log 3})$, la serie converge assolutamente per $x \in (1, \frac{\log 5}{\log 3})$. Per $x = 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}$, che converge [in quanto $\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1))$]. Per $x = \frac{\log 5}{\log 3}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}$, che converge assolutamente. Quindi la serie converge assolutamente in $[1, \frac{\log 5}{\log 3}]$. Non converge altrove.

(13) Sia $a_n := \frac{x^n}{1+nx^2}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = |x| \frac{1}{\sqrt[n]{1+nx^2}} \to |x|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-1, 1)$. Per $x = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n}$, che converge (non assolutamente) per il teorema di Leibniz. Per $x = 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-1, 1)$ e semplicemente in $[-1, 1)$. Non converge altrove.

(14) Sia $a_n := \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \to e^{-x}$, la serie converge assolutamente per $x \in (0, +\infty)$. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(0, +\infty)$. Non converge altrove.

(15) Sia $a_n := \frac{1}{(\log n)^x}$. Poiché per $x \le 0$, $a_n := \frac{1}{(\log n)^x} \not\to 0$, e per $x > 0$, $\frac{1}{(\log n)^x} \ge \frac{1}{n}$ definitivamente, la serie non converge mai.

(16) Sia $a_n := \frac{1}{\sqrt{n^x(1+n^2)}}$. Poiché $a_n = \frac{1}{n^{1+x/2}}(1+o(1))$, la serie converge assolutamente per $x \in (0, +\infty)$. Non converge altrove.

(17) Sia $a_n := \frac{(1-x)^n}{n^x}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|1-x|}{\sqrt[n]{n^x}} \to |x-1|$, la serie converge assolutamente per $x \in (0, 2)$. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, che non converge. Per $x = 2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, che converge assolutamente. Quindi la serie converge assolutamente in $(0, 2]$. Non converge altrove.

(18) Sia $a_n := \frac{n^{2x}-1}{n^3+1}$. Poiché $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n^3}(1+o(1)), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{n^{3-2x}}(1+o(1)), & x > 0, \end{cases}$ la serie converge assolutamente per $x \le 0$ oppure $\begin{cases} x > 0 \\ 3-2x > 1 \iff x < 1, \end{cases}$ cioè $x \in (-\infty, 1)$. Non converge altrove.

(19) Sia $a_n := \frac{n^{x-2}+n^{4-x^2}}{n^2}$. Poiché $a_n = \frac{1}{n^{4-x}} + \frac{1}{n^{x^2-2}}$ e $4-x \ge x^2-2 \iff x^2+x-6 \le 0 \iff -3 \le x \le 2$, si ha $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^{x^2-2}}(1+o(1)), & -3 < x < 2, \\ \frac{2}{n^7}, & x = -3, \\ \frac{2}{n^2}, & x = 2, \\ \frac{1}{n^{4-x}}(1+o(1)), & x < -3 \ \vee\ x > 2, \end{cases}$ e quindi la serie converge assolutamente per

$$\begin{cases} -3 \le x \le 2 \\ x^2 - 2 > 1 \iff |x| > \sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < -3 \ \vee \ x > 2, \\ 4 - x > 1 \iff x < 3, \end{cases} \quad \text{cioè } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3).$$

Non converge altrove.

(20) Sia $a_n := \left(1 - \sqrt[n]{2}\cos\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$, $x \ge 0$. Poiché $a_n := 1 - \sqrt[n]{2}\cos\sqrt{\frac{x}{n}} = 1 - \big(1 + \frac{\log 2}{n} + \frac{(\log 2)^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)\big(1 - \frac{x}{2n} + \frac{x^2}{24n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big) = \frac{x - 2\log 2}{2n} - \big(\frac{x^2}{24} - \frac{x\log 2}{2} + \frac{(\log 2)^2}{2}\big)\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, la serie non converge se $x \ne \log 4$. Se $x = \log 4$ si ha $a_n = \frac{(\log 2)^2}{3n^2}(1 + o(1))$, e quindi la serie converge assolutamente.

$\square$

Analisi Matematica II
Serie di funzioni (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ [perché $|\operatorname{arctg}(x^n)| \leq \frac{\pi}{2}$]. Si ha $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \frac{\pi}{2n} \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows 0$ in $\mathbb{R}$.

(2) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, $x \geq 0$. Inoltre, $\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{2x}{x+n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+n} = 2 \not\to 0$, mentre, per ogni $a > 0$, si ha $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} \frac{2x}{x+n} = \frac{2a}{a+n} \to 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $[0,+\infty)$, ma $f_n \rightrightarrows f$ in $[0,a]$, $a > 0$.

(3) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1], \\ +\infty, & x > 1. \end{cases}$ Osserviamo che $f_n'(x) = nx^{n-1}(n\log x + 1) \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$. Quindi $\sup_{x\in(0,1]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{e}})| = \frac{1}{e} \not\to 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows 0$ in $(0,1]$. Mentre si ha $\sup_{x\in(0,\frac12]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(\frac12)| \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $(0,\frac12]$. In generale, per ogni $\delta > 0$, si ha $\sup_{x\in(0,1-\delta]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(1-\delta)| \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $(0, 1-\delta]$, $\delta > 0$.

(4) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac1n \log(1 + nx^2)\right) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$ Si ha $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - f| = +\infty$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$. Viceversa, per ogni $a > 0$, si ha $\sup_{x\in[-a,a]} |f_n - f| = \sup_{x\in[-a,a]}(\sqrt[n]{1 + nx^2} - 1) = f_n(a) - 1 \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $[-a,a]$, $a > 0$.

(5) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+(n^2-x^2)^2} = 1 \not\to 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$.
Determiniamo ora il generico intervallo di convergenza uniforme. Per ogni $a > 0$, $n > a$, si ha $\sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \frac{1}{1+(n^2-x^2)^2} = \frac{1}{1+(n^2-a^2)^2} \to 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$, ma $f_n \rightrightarrows f$ in $[-a,a]$, $a > 0$.

(6) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \exp(n^x \log n) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ +\infty, & x \geq 0. \end{cases}$ Si ha, per ogni $a > 0$, $\sup_{x\in(-\infty,-a]} |f_n - f| = \sup_{x\in(-\infty,-a]} \big(\exp(n^x \log n) - 1\big) = \exp(\frac{\log n}{n^{|a|}}) - 1 \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $(-\infty,-a]$, $a > 0$. Viceversa, per ogni $a > 0$, si ha $\sup_{x\in[-a,0)} |f_n - f| = \sup_{x\in[-a,0)} \big(\exp(n^x \log n) - 1\big) = 1$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $[-a,0)$, $a > 0$.

(7) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, e occorre calcolare $\sup |f_n| = \sup \frac{|x|e^{-n|x|}}{|x|+\frac1n}$. Studiamo, quindi, la funzione $g_n(y) := \frac{ye^{-ny}}{y+\frac1n}$, $y \geq 0$. Si ha $g_n'(y) = \frac{(e^{-ny}-nye^{-ny})(y+\frac1n)-ye^{-ny}}{(y+\frac1n)^2} = \frac{e^{-ny}}{(y+\frac1n)^2}\big(-ny^2 - y + \frac1n\big) \geq 0 \iff 0 \leq y \leq \frac{\sqrt5-1}{2n}$, per cui $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = g_n\big(\frac{\sqrt5-1}{2n}\big) = \frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1} e^{-\frac{\sqrt5-1}{2}} \not\to 0$, e quindi $f_n \not\rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$.
Determiniamo ora il generico intervallo di convergenza uniforme. Per ogni $a > 0$, si ha $\sup_{|x|\geq a} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) \to 0$, e quindi $f_n \rightrightarrows f$ in $(-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$.

(8) Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ x^2, & |x| > 1. \end{cases}$ Poiché $f_n'(x) = \frac1n(1 + x^{2n})^{\frac1n - 1} 2nx^{2n-1} \geq 0 \iff x \geq 0$, si ha $\sup_{|x|\leq1} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) - 1 = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$, in $[-1,1]$. Inoltre, $\sup_{|x|>1} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{|x|>1} \big(\sqrt[n]{1 + x^{2n}} - x^2\big) = \sup_{y>1} \big(\sqrt[n]{1 + y^n} -

$y) \overset{(a)}{=} \sqrt[n]{2}-1 \to 0$ [dove in (a) si è usato il fatto che, posto $g_n(y) := \sqrt[n]{1+y^n}-y$, $y \geq 1$, si ha $g_n'(y) = \frac{1}{n}(1+y^n)^{\frac{1}{n}-1}ny^{n-1}-1 = \frac{y^{n-1}-(1+y^n)^{1-\frac{1}{n}}}{(1+y^n)^{1-\frac{1}{n}}} \geq 0 \iff y^{n-1}-(1+y^n)^{\frac{n-1}{n}} \geq 0 \iff y-(1+y^n)^{1/n} \geq 0$, mai]. Quindi $f_n \rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$.

(9) Osserviamo che $\operatorname{dom} f_n = \{x \in \mathbb{R} : 1+\frac{1}{x} > 0\} = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$, mentre $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \iff \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \in (-1,1) \iff x \in (-\infty, -\frac{e}{e-1}) \cup (\frac{1}{e-1},+\infty)$, e quindi si ha $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,-\frac{e}{e-1}) \cup (\frac{1}{e-1},+\infty), \\ +\infty, & x \in (0,\frac{1}{e-1}), \\ \nexists, & x \in (-\frac{e}{e-1},-1). \end{cases}$ Si ha $f_n \not\rightrightarrows f$ in $(0,1]$, perché non c'è nemmeno convergenza puntuale, e $\sup_{[\frac{1}{2},1]} |f_n(x)-f(x)| = (\log 3)^n \not\to 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $[\frac{1}{2},1]$.
Determiniamo ora il generico intervallo di convergenza uniforme. Si ha $\sup_{x\in(-\infty,-\frac{e}{e-1})} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(\frac{1}{e-1},+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = 1$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $(-\infty,-\frac{e}{e-1})$ e in $(\frac{1}{e-1},+\infty)$. Inoltre, per ogni $\delta > 0$, si ha $\sup_{x\in(-\infty,-\frac{e}{e-1}-\delta]} |f_n(x)-f(x)| = |f_n(-\frac{e}{e-1}-\delta)| \to 0$, e $\sup_{x\in[\frac{1}{e-1}+\delta,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = |f_n(\frac{1}{e-1}+\delta)| \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $(-\infty,-\frac{e}{e-1}-\delta] \cup [\frac{1}{e-1}+\delta,+\infty)$, $\delta > 0$.

(10) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1], \\ \nexists, & \text{altrimenti.} \end{cases}$ Si ha $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{n^{x+1}} = \frac{1}{n} \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $[0,1]$.
Determiniamo ora il generico intervallo di convergenza uniforme. Poiché $\sup_{x\in(-1,1]} |f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(-1)| = |\sin n| \not\to 0$, si ha $f_n \not\rightrightarrows 0$ in $(-1,1]$. Osserviamo, inoltre, che la funzione $g_n(x) := \frac{|x|^n}{n^{x+1}}$ è decrescente in $(-1,0]$, in quanto $x \mapsto |x|^n$ e $x \mapsto \frac{1}{n^{x+1}}$ sono decrescenti, mentre g_n è crescente in $[0,1]$, in quanto $g_n'(x) = x^{n-1}e^{-(x+1)\log n}(n-x\log n) \geq 0 \iff x \leq \frac{n}{\log n}$. Quindi, per ogni $\delta > 0$, si ha $\sup_{x\in[-1+\delta,1]} |f_n(x)-f(x)| \leq \sup_{x\in[-1+\delta,1]} \frac{|x|^n}{n^{x+1}} = \max\{(1-\delta)^n, \frac{1}{n^2}\} \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $[-1+\delta,1]$, $\delta > 0$.

(11) Osserviamo che $f_n(0) = 0$, se $x < 0$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n^3}(1+o(1))$, e, se $x > 0$, $f_n(x) = \frac{1}{n^{3-2x}}(1+o(1))$, per cui $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{3}{2}, \\ 1, & x = \frac{3}{2}, \\ +\infty, & x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ La successione non convergere uniformemente in alcun insieme che contenga $x = \frac{3}{2}$, perché f non è ivi continua. Per determinare se la successione converge uniformemente, calcoliamo, per ogni $\delta > 0$, $M_n := \sup_{(-\infty,\frac{3}{2}-\delta]} |f_n(x)| = \max\{\lim_{x\to-\infty} |f_n(x)|, f_n(\frac{3}{2}-\delta)\} = \max\{\frac{1}{n^3+1}, f_n(\frac{3}{2}-\delta)\}$. Poiché $M_n \to 0$, la successione data converge uniformemente in $(-\infty,\frac{3}{2}-\delta]$, per ogni $\delta > 0$.

(12) Osserviamo che $f_n(0) = n\sin\frac{1}{n} \to 1$, mentre, se $x \neq 0$, $f_n(x) = e^{-nx^2}(1+o(1)) \to 0$, per cui $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$ La successione non convergere uniformemente in alcun insieme che contenga $x = 0$, perché f non è ivi continua. Per determinare se la successione converge uniformemente, calcoliamo, per ogni $a > 0$, $M_n := \sup_{|x|\geq a} |f_n(x)| = f_n(a)$. Poiché $M_n \to 0$, la successione data converge uniformemente in $(-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$, per ogni $a > 0$.

(13) Osserviamo che $f_n(0) = 0$, mentre, se $x \neq 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^{3/2}}(1+o(1))$, per cui $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo che $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \sin\left(\sqrt{n}\sin\frac{x}{n^2}\right) \geq \sin 1$ in quanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste

$x_n = n^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ tale che $\sin\left(\sqrt{n}\sin\frac{x_n}{n^2}\right) = \sin 1$; quindi la successione non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$\sup_{|x|\le M}\left|\sin\left(\sqrt{n}\sin\frac{x}{n^2}\right)\right| \le \sup_{|x|\le M}\left|\sqrt{n}\sin\frac{x}{n^2}\right| \le \frac{M}{n^{3/2}}$$

e quindi la successione converge uniformemente in $[-M,\, M]$, per ogni $M>0$.

(14) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n^2\log(1+\frac{x}{n})\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\big(nx(1+o(1))\big) = \begin{cases} 0, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ +\infty, & x>0.\end{cases}$ Poiché f non è continua in $x=0$, $f_n \not\rightrightarrows f$ in ogni insieme che contiene 0.

Determiniamo ora il generico intervallo di convergenza uniforme. Per ogni $\delta>0$, si ha $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]}|f_n(x)-f(x)| = +\infty$, mentre, per ogni $a>\delta>0$, si ha, per ogni $n>a$, $\sup_{x\in[-a,-\delta]}|f_n(x)-f(x)| = |f_n(-a)| \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $[-a,-\delta]$, $a>\delta>0$.

(15) Osserviamo che $f_n(0)=1$; se $x\neq 0$, $f_n(x) = \exp\big(-x^2n(1+o(1))\big)$, per cui $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$ La successione non convergere uniformemente in alcun insieme che contenga $x=0$, perché f non è ivi continua. Per determinare se la successione converge uniformemente, calcoliamo, per ogni $b>a>0$, e $n>b$, $M_n := \sup_{a\le|x|\le b}|f_n(x)| = f_n(\pm a)$, perché $f_n(x)$ è decrescente in $[a,b]$. Poiché $M_n\to 0$, la successione data converge uniformemente in $[-b,-a]\cup[a,b]$, per ogni $b>a>0$.

(16) Osserviamo che $f_n(0)=0$, se $0<|x|<1$, $f_n(x) = \frac{x^{n-2}}{n}(1+o(1))$, se $x=-1$, $f_n(-1) = \frac{(-1)^n}{1+n}$, se $x=1$, $f_n(1) = \frac{1}{1+n}$, ed infine, se $|x|>1$, $f_n(x) = \frac{x^{n-2}}{n}(1+o(1))$, per cui $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x\in[-1,1],\\ +\infty, & x\notin[-1,1].\end{cases}$ Per determinare se la successione converge uniformemente, calcoliamo $M_n := \sup_{|x|\le 1}|f_n(x)| = \max\{\sup_{|x|\le 1-\delta}|f_n(x)|, \sup_{1-\delta\le|x|\le 1}|f_n(x)|\} \le \max\{\sup_{|x|\le 1-\delta}|x|^n, \sup_{1-\delta\le|x|\le 1}\frac{1}{1+nx^2}\} = \max\{(1-\delta)^n, \frac{1}{1+(1-\delta)^2 n}\} \to 0$. Poiché $M_n\to 0$, la successione data converge uniformemente in $[-1,1]$.

(17) Osserviamo che $f_n(0)=0$, e, se $x>0$, $f_n(x) = \exp\big(-x\log n + \log x\,\log\log n\big) = \frac{1}{n^x}(1+o(1))$, per cui $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x\in[0,+\infty)$. Inoltre, $f_n'(x) = (-\log n + \frac{\log\log n}{x})f_n(x) \ge 0 \iff x \le \frac{\log\log n}{\log n}$, per cui $M_n := \sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)| = f_n(\frac{\log\log n}{\log n}) = \exp\big(-\log\log n(\log\log n - \log\log\log n + 1)\big)$. Poiché $M_n\to 0$, la successione data converge uniformemente in $[0,+\infty)$.

(18) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ [perché, se $x\le 0 \vee x\ge 1$, è ovvio, e, se $x\in(0,1)$, segue da $\left|x^n\sin(\frac{1}{x^n})\right| \le x^n \to 0$]. Poiché $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| \ge f_n(\sqrt[n]{\frac{2}{3\pi}}) = \frac{2}{3\pi} \not\to 0$, si ha $f_n \not\rightrightarrows 0$ in $\mathbb{R}$.

Determiniamo ora il generico intervallo di convergenza uniforme. Per ogni $\delta>0$, si ha $\sup_{x\in(-\infty,1-\delta]}|f_n(x)-f(x)| \le \sup_{x\in[0,1-\delta]} x^n = \delta^n \to 0$, e $\sup_{x\in[1,+\infty)}|f_n(x)-f(x)| = 0$, per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $(-\infty,1-\delta]\cup[1,+\infty)$, $\delta>0$.

(19) Osserviamo che, per ogni $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$, esiste $n_x\in\mathbb{N}$ tale che $|x|>\frac{1}{n}$, per ogni $n\ge n_x$, per cui $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, mentre $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $[-1,1]$. Inoltre, fissato $a\in(0,1)$, si ha, per ogni $n>\frac{1}{a}$, $\sup_{x\in[-1,-a]\cup[a,1]}|f_n(x)-f(x)| = 0$, e quindi $f_n \rightrightarrows f$ in $[-1,-a]\cup[a,1]$, $a\in(0,1)$.

(20) Osserviamo che $f_n(0) = 1$, mentre, se $0 < x \leq 2$, $f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n^x} \to 0$, e, se $x \notin [0,2]$, $|f_n(x)| \to +\infty$, per cui $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,2], \\ +\infty, & x \notin [0,2]. \end{cases}$ La successione non convergere uniformemente in alcun insieme che contenga $x = 0$, perché f non è ivi continua. Per determinare se la successione converge uniformemente, calcoliamo, per ogni $\delta > 0$, $M_n := \sup_{[\delta,2]} |f_n(x)| \leq \sup_{[\delta,2]} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^\delta} \to 0$. Poiché $M_n \to 0$, la successione data converge uniformemente in $[\delta, 2]$, per ogni $\delta > 0$.

(21) Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < 2, \\ \nexists, & x \geq 2. \end{cases}$ Poiché $f_n'(x) = n\big((1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}\big) = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx) \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq \frac{1}{n+1}, & n \text{ dispari}, \\ x \leq \frac{1}{n+1} \vee x \geq 1, & n \text{ pari}, \end{cases}$ si ha, per ogni $\delta > 0$, $\sup_{x\in[0,2-\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \max\{f_n(\frac{1}{n+1}), |f_n(2-\delta)|\} = \max\{\frac{n}{n+1}\big(\frac{n}{n+1}\big)^n, n(2-\delta)(1-\delta)^n\} = \big(1 - \frac{1}{n+1}\big)^{n+1} \to \frac{1}{e} \neq 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows 0$ in $[0, 2-\delta]$. Ma si ha, per ogni $\delta > 0$, $\sup_{x\in[\delta,2-\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \max\{f_n(\delta), |f_n(2-\delta)|\} = \max\{n\delta(1-\delta)^n, n(2-\delta)(1-\delta)^n\} \to 0$, per cui $f_n \rightrightarrows 0$ in $[\delta, 2-\delta]$, $\delta > 0$.

$\square$

Svolgimento esercizio 3

(1) È una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2$. Inoltre, se $x = -2$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, che converge [non assolutamente]; se $x = 2$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che non converge. Quindi la serie converge puntualmente in $[-2, 2)$, e assolutamente in $(-2, 2)$, e uniformemente in ogni insieme della forma $[-2, 2-\delta]$, con $\delta > 0$.

(2) È una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)!}{(n+1)^3 n!} = +\infty$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$, e uniformemente in ogni insieme della forma $[-a, a]$, con $a > 0$.

(3) È una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)} = 1$. Inoltre, se $x = \pm 1$, la serie diventa $\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$, che converge assolutamente. Quindi la serie converge puntualmente, assolutamente, e uniformemente in $[-1, 1]$.

(4) È una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{n+1}) \log n}{(1+\sqrt{n}) \log(n+1)} = 1$. Inoltre, se $x = -1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{1+\sqrt{n}}$, che converge [non assolutamente], per Leibniz; se $x = 1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}$, che non converge. Quindi la serie converge puntualmente in $[-1, 1)$, assolutamente in $(-1, 1)$, e uniformemente in $[-1, 1-\delta]$, con $\delta > 0$.

(5) È una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Inoltre, se $x = -1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(}{n} + 1)$, che non converge; se $x = 1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$, che non converge. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente in $(-1, 1)$, e uniformemente in $[-1+\delta, 1-\delta]$, con $\delta > 0$.

(6) È una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$. Inoltre, se $x = -\frac{1}{2}$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$, che converge [non assolutamente], per Leibniz; se $x = \frac{3}{2}$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, che non converge. Quindi la serie converge puntualmente in $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, assolutamente in $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, e uniformemente in $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta]$, con $\delta > 0$.

(7) È una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\sqrt{(n+1)^2-1}}{3^n\sqrt{n^2-1}} = 3$. Inoltre, se $x = 0$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, che non converge; se $x = 6$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}$, che converge [non assolutamente], per Leibniz. Quindi la serie converge puntualmente in $(0, 6]$, assolutamente in $(0, 6)$, e uniformemente in $[\delta, 6]$, con $\delta > 0$.

(8) È una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\sqrt{(n+1)^2-1}+3^{n+1})}{(n+1)^2(\sqrt{n^2-1}+3^n)} = 3$. Inoltre, se $x = -4$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 3^n}{\sqrt{n^2-1}+3^n}$, che non converge; se $x = 2$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{\sqrt{n^2-1}+3^n}$, che non converge. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente in $(-4, 2)$, e uniformemente in $[-4+\delta, 2-\delta]$, con $\delta > 0$.

(9) Osserviamo che $\sqrt[n]{|f_n(x)|} = |x|^n(1 + o(1))$, ed inoltre, se $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{n}$, e se $x = -1$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$, per cui la serie converge semplicemente in $[-1, 1)$ e assolutamente in $(-1, 1)$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{[-1+\delta, 1-\delta]} |f_n(x)| = f_n(1-\delta) = \frac{(1-\delta)^{n^2}}{n}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[-1+\delta, 1-\delta]$, per ogni $\delta > 0$.

(10) Osserviamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} 3^{n^4}|x|^{(n-1)!} = \begin{cases} +\infty, & |x| \geq 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases}$ per cui la serie converge assolutamente in $(-1, 1)$, e non converge altrove. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{[-1+\delta,1-\delta]} |f_n(x)| = f_n(1-\delta) = 3^{n^5}(1-\delta)^{n!}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[-1+\delta, 1-\delta]$, per ogni $\delta > 0$.

(11) Posto $y = \varphi(x) := \frac{2}{3}x - 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} ny^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza 1, che converge puntualmente e assolutamente in $(-1, 1)$, e uniformemente in ogni intervallo della forma $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\delta > 0$. Quindi la serie data converge puntualmente e assolutamente per ogni x tale che $-1 < \frac{2}{3}x - 1 < 1 \iff x \in (0, 3)$. Inoltre, la serie data converge uniformemente in $[\delta, 3-\delta]$, con $\delta > 0$.

(12) Posto $y = \varphi(x) := \frac{1}{x+1}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{n^2-1}\, y^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza 1, che converge puntualmente e assolutamente in $(-1, 1)$, e uniformemente in ogni intervallo della forma $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\delta > 0$. Quindi la serie data converge puntualmente e assolutamente per ogni x tale che $-1 < \frac{1}{x+1} < 1 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Inoltre, la serie data converge uniformemente in $(-\infty, -2-\delta] \cup [\delta, +\infty)$, con $\delta > 0$.

(13) Posto $y = \varphi(x) := \frac{x+1}{x-1}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2)y^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza 1, che converge puntualmente e assolutamente in $(-1, 1)$, e uniformemente in ogni intervallo della forma $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\delta > 0$. Quindi la serie data converge puntualmente e assolutamente per ogni x tale che $-1 < \frac{x+1}{x-1} < 1 \iff x < 0$. Inoltre, la serie data converge uniformemente in $(-\infty, -\delta]$, con $\delta > 0$.

(14) Posto $y = \varphi(x) := e^{-x}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}y^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza $\frac{1}{2}$, che converge puntualmente e assolutamente in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e uniformemente in ogni intervallo della forma $[-\frac{1}{2}+\delta, \frac{1}{2}-\delta]$, $\delta > 0$. Quindi la serie data converge puntualmente e assolutamente per ogni x tale che $-\frac{1}{2} < e^{-x} < \frac{1}{2} \iff x > \log 2$. Inoltre, la serie data converge uniformemente in $[\log 2 + \delta, +\infty)$, con $\delta > 0$.

(15) Posto $y = \varphi(x) := 4 - 3^x$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(\frac{\sqrt{n}+2}{n^2+n})\, y^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza 1, che converge puntualmente, assolutamente e uniformemente in $[-1, 1]$. Quindi la serie data converge puntualmente, assolutamente e uniformemente per ogni x tale che $-1 \leq 4 - 3^x \leq 1 \iff x \in [1, \frac{\log 5}{\log 3}]$.

(16) Posto $y = \varphi(x) := xe^{-x^2}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza 1, che converge puntualmente e assolutamente in $(-1, 1)$, e uniformemente in ogni intervallo della forma $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\delta > 0$. Quindi la serie data converge puntualmente e assolutamente per ogni x tale che $-1 < xe^{-x^2} < 1 \iff x \in \mathbb{R}$ [in quanto $\varphi'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} \geq 0 \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\varphi(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$, per cui $-\frac{1}{\sqrt{2e}} \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$]. Inoltre, la serie data converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

(17) Posto $y = \varphi(x) := \cos x$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} y^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza 1. Inoltre, se $y = -1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n}$, che converge [per Leibniz], ma non assolutamente; se $x = 1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$, che non converge. Quindi la serie converge puntualmente in $[-1, 1)$, e assolutamente in $(-1, 1)$, e uniformemente in ogni intervallo della forma $[-1, 1-\delta]$, $\delta > 0$. Quindi la serie data converge puntualmente per ogni x tale che $-1 \leq \cos x < 1 \iff x \in (0, 2\pi) \mod 2\pi$, e assolutamente per ogni x tale che $-1 < \cos x < 1 \iff x \in (0, \pi)$

mod π. Inoltre, la serie data converge uniformemente in ogni insieme della forma $[\delta, 2\pi-\delta] \mod 2\pi$, con $\delta > 0$.

(18) Posto $y = \varphi(x) := \sin x$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} y^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza $\frac{1}{2}$, che converge puntualmente in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, assolutamente in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e uniformemente in ogni intervallo della forma $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\delta]$, $\delta > 0$. Quindi la serie data converge puntualmente per ogni x tale che $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \iff x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi)$, e assolutamente in $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi)$. Inoltre, la serie data converge uniformemente in $\cup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi-\delta]$, con $\delta > 0$. $\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) Si ha $f(x) = \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n - \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Il raggio di convergenza è $r = +\infty$.

(2) Si ha $f(x) = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n + \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}$. Il raggio di convergenza è $r = +\infty$.

(3) Si ha $f(x) = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^n$. Il raggio di convergenza è $r = +\infty$.

(4) Si ha $f(x) = \cos x = \cos\big(\dfrac{\pi}{2} + (x - \dfrac{\pi}{2})\big) = -\sin\big(x - \dfrac{\pi}{2}\big) = -\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\big(x - \dfrac{\pi}{2}\big)^{2n+1}$. Il raggio di convergenza è $r = +\infty$.

(5) Si ha $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-(x/2)^2} = \dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{4^{n+1}}$. Il raggio di convergenza è 2.

(6) Si ha $f(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$. Il raggio di convergenza è 1.

(7) Si ha $f(x) = \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2+(x-1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\big(\dfrac{x-1}{2}\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$. Il raggio di convergenza è 2.

(8) Poiché $\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} \iff 2z = A(x+1) + B(x-1) \iff \begin{cases} A+B=2 \\ A-B=0 \end{cases} \iff A = B = 1$, ne segue

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = -\sum_{n=0}^{\infty}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\big(1-(-1)^n\big)x^n = -2\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k+1}.$$

Il raggio di convergenza è 1.

(9) Si ha $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Il raggio di convergenza è 1.

(10) Si ha $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2} = x\,\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{1}{1-x} = x\,\dfrac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Il raggio di convergenza è 1.

(**Procedimento alternativo**) Poiché $\dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} \iff x = A(x-1) + B \iff \begin{cases} A = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases} \iff A = B = 1$, ne segue

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{1-x} + \frac{d}{dx}\,\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

(11) Poiché $\dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} \iff x = A(x+1) + B \iff \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \iff A = 1, B = -1$, ne segue

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{d}{dx}\,\frac{1}{1+x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(n+1)(x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(2-n-1)(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{2^{n+2}}(x-1)^n. \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza è 1.

(12) Osserviamo che da $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, derivando due volte, si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(x+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}, \\ \frac{2}{(1+x)^3} &= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)x^n, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)x^n \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)\Big(n+2-\frac{n}{2}\Big)\,x^n = 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+4)\,x^n. \end{aligned}$$

(13) Poiché $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{C}{x-1} \iff x = (Ax+B)(x+1) + C(x^2+1) \iff$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=1 \\ -B+C=0 \end{cases} \iff A=-\frac{1}{2}, B=C=\frac{1}{2}, \text{ ne segue}$$

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} &= -\frac{1}{2}\,\frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\,(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n + \frac{1}{2}\,\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= -\frac{1}{2}\,\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\,\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^{n+1})x^{2n}\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\,\Big(\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{4n+2}\Big) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+2}. \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza è 1, perché entrambe le serie costituenti hanno raggio di convergenza 1.

(14) Si ha

$$f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\,\log(1+x) - \frac{1}{2}\,\log(1-x) = \frac{1}{2}\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{2}\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(-x)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

(15) Per ogni $x \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2x}\log(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n + \frac{1}{2x}\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\,(2x)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\,(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\,\frac{n+2}{n+1}\,x^n. \end{aligned}$$

□