

Analisi Matematica I
Equazioni differenziali

Esercizio 1. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy con equazione differenziale del primo ordine, a variabili separabili

$$(1) \begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y' = 8ty + t \\ y(1) = \frac{7}{8} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y' = -\frac{y}{t} + \frac{1}{t} \\ y(1) = 2, \text{ oppure } y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} y' = \frac{y+1}{\sqrt{t}} \\ y(1) = 1, \text{ oppure } y(1) = -1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} y' = 2ty^2 \\ y(0) = -1, \text{ oppure } y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} y' = \frac{t}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{2t^2y} \\ y(1) = -1, \text{ oppure } y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{t^2} \\ y(-1) = 1, \text{ oppure } y(1) = -1 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} y' = \frac{(t-1)y}{(t+1)(t^2+1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} y' = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} y' = \frac{y \log y}{t} \\ y(1) = e, \text{ oppure } y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(12) \begin{cases} y' = (y+1) \cos t \\ y(0) = 1, \text{ oppure } y(0) = -1 \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} y' = \cos^2 y \\ y(0) = \frac{\pi}{4}, \text{ oppure } y(0) = \frac{\pi}{2}, \text{ oppure } y(0) = \pi \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} y' = \frac{1}{y \operatorname{tg} t} \\ y(-\frac{\pi}{6}) = -1, \text{ oppure } y(-\frac{\pi}{6}) = 1 \end{cases}$$

$$(15) \begin{cases} y' = \sqrt{\frac{y}{t}} \sin \sqrt{t} \\ y(\frac{\pi^2}{4}) = 1, \text{ oppure } y(\frac{\pi^2}{4}) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy con equazione differenziale lineare del primo ordine

$$(1) \begin{cases} y' = y + t \\ y(1) = e - 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y' = \frac{y}{t} + t^2 e^t \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y' = \frac{1-t^4}{t} y + t^4 \\ y(2) = -2 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} y' = -\frac{2}{t} y + \frac{1}{t+1} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} y' = -\frac{2}{t+1} y + \frac{1}{t} \\ y(1) = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} y' = \frac{2y}{t} + \frac{t+1}{t} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} y' = \frac{t-1}{t} y + t^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} y' = \frac{y}{t(1+t^2)} + \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} y' = \frac{y+t}{\sqrt{t}} \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} y' = -\frac{y}{2t} + \sqrt{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} y' = \frac{y}{t \log t} + \frac{1}{t} \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

$$(12) \begin{cases} y' = (y + \cos^2 t) \sin t \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} y' = y \operatorname{tg} t + \sin t \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} y' = \frac{y}{\operatorname{tg} t} + \sin t \\ y(\frac{\pi}{6}) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy con equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

- (1) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,
- (2) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,
- (3) $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (4) $y'' - y' - 6y = -e^{4t} + 6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{3}$,
- (5) $y'' + 3y' - 4y = 4 + 17 \sin t$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$,
- (6) $y'' + y = \sin 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (7) $y'' + 2y' + 5y = e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (8) $y'' + 2y' + y = e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (9) $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$,
- (10) $y'' - y' = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,
- (11) $y'' - 2y' = e^{2t} + t - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{4}$,
- (12) $y'' = t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,
- (13) $y'' + y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (14) $y'' + 2y' + y = te^{-t}$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$,
- (15) $y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (16) $y''' - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$,
- (17) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$,
- (18) $y''' + y'' - 2y = 5e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$,
- (19) $y^{(4)} - 4y'' = 8$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 5$, $y'''(0) = 2$,
- (20) $y^{(4)} + 2y'' + y = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$.

Analisi Matematica I
Equazioni differenziali (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

- (1) Si ha $\int y^{-2/3} dy = \int dt \iff 3\sqrt[3]{y} = t + c$. Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 3$, per cui $y(t) = (1 + \frac{t}{3})^3, t \in \mathbb{R}$.
- (2) Si ha $\int \frac{dy}{8y+1} = \int t dt \iff \frac{1}{8} \log|8y+1| = \frac{1}{2} t^2 + c \iff 8y+1 = c'e^{4t^2} \iff y = c''e^{4t^2} - \frac{1}{8}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $\frac{7}{8} = c'' - \frac{1}{8} \iff c'' = 1$, per cui $y(t) = e^{4t^2} - \frac{1}{8}, t \in \mathbb{R}$.
- (3) Si ha $\int \frac{dy}{y-1} = -\int \frac{dt}{t} \iff \log|y-1| = -\log|t| + c \iff y-1 = \frac{c'}{t} \iff y = \frac{c'}{t} + 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $2 = c' + 1 \iff c' = 1$, per cui $y(t) = \frac{1}{t} + 1, t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 1, t > 0$.
- (4) Si ha $\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \iff \log|y+1| = 2\sqrt{t} + c \iff y+1 = c'e^{2\sqrt{t}} \iff y = c'e^{2\sqrt{t}} - 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = c'e^2 - 1 \iff c' = \frac{2}{e^2}$, per cui $y(t) = 2e^{2(\sqrt{t}-1)} - 1, t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = -1, t > 0$.
- (5) Si ha $\int \frac{dy}{y^2} = \int 2t dt \iff -\frac{1}{y} = t^2 + c \iff y = \frac{1}{c-t^2}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $-1 = \frac{1}{c} \iff c = -1$, per cui $y(t) = -\frac{1}{t^2+1}, t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.
- (6) Si ha $\int y dy = \int t dt \iff \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} t^2 + c \iff y = \pm\sqrt{t^2 + c'}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $-1 = -\sqrt{c'} \iff c' = 1$, per cui $y(t) = -\sqrt{t^2 + 1}, t \in \mathbb{R}$.
- (7) Si ha $\int \frac{2y dy}{y^2+1} = \int \frac{dt}{t^2} \iff \log(y^2+1) = -\frac{1}{t} + c \iff y^2+1 = c'e^{-\frac{1}{t}} \iff y = \pm\sqrt{c'e^{-\frac{1}{t}} - 1}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $-1 = -\sqrt{c'e^{-1} - 1} \iff c' = 2e$, per cui $y(t) = -\sqrt{2e^{1-\frac{1}{t}} - 1}, t > \frac{1}{1+\log 2}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \sqrt{2e^{1-\frac{1}{t}} - 1}, t > \frac{1}{1+\log 2}$.
- (8) Si ha $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dt}{t^2} \iff \operatorname{arctg} y = -\frac{1}{t} + c \iff y = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{t})$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = \operatorname{tg}(c+1) \iff c = \frac{\pi}{4} - 1$, per cui $y(t) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - 1 - \frac{1}{t}), t < -\frac{1}{1+\frac{\pi}{4}}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $-1 = \operatorname{tg}(c-1) \iff c = 1 - \frac{\pi}{4}$, per cui $y(t) = \operatorname{tg}(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{t}), t > \frac{1}{1+\frac{\pi}{4}}$.
- (9) Si ha $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(t-1)dt}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t+1} \iff \log|y| = \frac{1}{2} \log(t^2+1) - \log|t+1| + c \iff y = c' \frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $-1 = c'$, per cui $y(t) = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}, t > -1$.
- (10) Si ha $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 2t dt \iff \arcsin y = t^2 + c \iff y = \sin(t^2 + c)$. Dalla condizione iniziale otteniamo $0 = c$, per cui $y(t) = \sin(t^2), |t| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- (11) Si ha $\int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{dt}{t} \iff \log|\log y| = \log|t| + c \iff \log y = c't \iff y = e^{c't}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c' = \log e = 1$, per cui $y(t) = e^t, t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 1, t > 0$.
- (12) Si ha $\int \frac{dy}{y+1} = \int \cos t dt \iff \log|y+1| = \sin t + c \iff y = c'e^{\sin t} - 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = c' - 1 \iff c' = 2$, per cui $y(t) = 2e^{\sin t} - 1, t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = -1, t \in \mathbb{R}$.

(13) Si ha $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dt \iff \operatorname{tg} y = t + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, per cui $y(t) = \operatorname{arctg}(t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \frac{\pi}{2}$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla terza condizione iniziale otteniamo $c = \operatorname{tg} \pi = 0$, per cui $y(t) = \pi + \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$ [in quanto la funzione inversa di $\operatorname{tg}|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})}$ è $\pi + \operatorname{arctg}$].

(14) Si ha $\int y dy = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt \iff \frac{1}{2} y^2 = \log |\sin t| + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = \frac{1}{2} + \log 2$, per cui $y(t) = -\sqrt{\log(4 \sin^2 t) + 1}$, $t \in (-\pi + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{e}}, -\arcsin \frac{1}{2\sqrt{e}})$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \sqrt{\log(4 \sin^2 t) + 1}$, $t \in (-\pi + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{e}}, -\arcsin \frac{1}{2\sqrt{e}})$.

(15) Si ha $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \iff 2\sqrt{y} = -2 \cos \sqrt{t} + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y(t) = (1 - \cos \sqrt{t})^2$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 0$, $t > 0$. □

Svolgimento esercizio 2

(1) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int dt \iff \log |y| = t + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^t$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^t$, per cui $y'_p(t) = c'(t)e^t + c(t)e^t$, e quindi $c'(t)e^t + c(t)e^t = c(t)e^t + t \iff c'(t) = te^{-t} \implies c(t) = \int te^{-t} dt = -(t+1)e^{-t}$. Quindi $y_p(t) = -(t+1)$, per cui $y_{gen}(t) = ce^t - t - 1$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = e^t - t - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} \iff \log |y| = \log |t| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = ct$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)t$, per cui $y'_p(t) = c'(t)t + c(t)$, e quindi $c'(t)t + c(t) = c(t) + t^2 e^t \iff c'(t) = te^t \implies c(t) = \int te^t dt = (t-1)e^t$. Quindi $y_p(t) = t(t-1)e^t$, per cui $y_{gen}(t) = ct + t(t-1)e^t$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = t(t-1)e^t - t$, $t > 0$.

(3) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1-t^4) dt}{t} \iff \log |y| = \log |t| - \frac{1}{4} t^4 + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = cte^{-t^4/4}$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)te^{-t^4/4}$, per cui $y'_p(t) = c'(t)te^{-t^4/4} + c(t)(1-t^4)e^{-t^4/4}$, e quindi $c'(t)te^{-t^4/4} + c(t)(1-t^4)e^{-t^4/4} = c(t)(1-t^4)e^{-t^4/4} + t^4 \iff c'(t) = t^3 e^{t^4/4} \implies c(t) = \int t^3 e^{t^4/4} dt = e^{t^4/4}$. Quindi $y_p(t) = t$, per cui $y_{gen}(t) = cte^{-t^4/4} + t$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -2e$, per cui $y_{Cauchy}(t) = t - 2te^{1-t^4/4}$, $t > 0$.

(4) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dt}{t} \iff \log |y| = -2 \log |t| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{t^2}$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{t^2}$, per cui $y'_p(t) = \frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3}$, e quindi $\frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3} = -\frac{2c(t)}{t^3} + \frac{1}{t+1} \iff c'(t) = \frac{t^2}{t+1} \implies c(t) = \int \frac{t^2}{t+1} dt = \frac{1}{2} t^2 - t + \log |t+1|$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \log |t+1|$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \log |t+1|$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{1}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t^2} \log(t+1)$, $t > 0$.

(5) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dt}{t+1} \iff \log |y| = -2 \log |t+1| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{(t+1)^2}$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{(t+1)^2}$, per cui $y'_p(t) = \frac{c'(t)}{(t+1)^2} - \frac{2c(t)}{(t+1)^3}$, e quindi $\frac{c'(t)}{(t+1)^2} - \frac{2c(t)}{(t+1)^3} = -\frac{2c(t)}{(t+1)^3} + \frac{1}{t} \iff c'(t) = \frac{t^2}{t+1} \implies c(t) = \int \frac{(t+1)^2}{t} dt = \frac{1}{2}t^2 + 2t + \log|t|$. Quindi $y_p(t) = \frac{t^2+4t+\log t^2}{2(t+1)^2}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{2c+4t+t^2+\log t^2}{2(t+1)^2}$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $2c = -1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{-1+4t+t^2+\log t^2}{2(t+1)^2}$, $t > 0$.

(6) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = 2 \log|t| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = ct^2$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)t^2$, per cui $y'_p(t) = c'(t)t^2 + 2tc(t)$, e quindi $c'(t)t^2 + 2tc(t) = 2tc(t) + \frac{t+1}{t} \iff c'(t) = \frac{t+1}{t^2} \implies c(t) = \int \frac{t+1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}$. Quindi $y_p(t) = -t - \frac{1}{2}$, per cui $y_{gen}(t) = ct^2 - t - \frac{1}{2}$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{9}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{9}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}$, $t > 0$.

(7) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{(t-1)dt}{t} \iff \log|y| = t - \log|t| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{t} e^t$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{t} e^t$, per cui $y'_p(t) = \frac{c'(t)}{t} e^t + c(t) \frac{t-1}{t^2} e^t$, e quindi $\frac{c'(t)}{t} e^t + c(t) \frac{t-1}{t^2} e^t = c(t) \frac{t-1}{t^2} e^t + t^2 \iff c'(t) = t^3 e^{-t} \implies c(t) = \int t^3 e^{-t} dt = -(t^3 + 3t^2 + 6t + 6)e^{-t}$. Quindi $y_p(t) = -t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{t} e^t - t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{16}{e}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{16}{t} e^{t-1} - t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$, $t > 0$.

(8) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t(t^2+1)} \iff \log|y| = \log|t| - \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{ct}{\sqrt{t^2+1}}$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)t}{\sqrt{t^2+1}}$, per cui $y'_p(t) = \frac{c'(t)t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}}$, e quindi $\frac{c'(t)t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}} = \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}} + \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \iff c'(t) = \frac{t^2+1}{t^2} \implies c(t) = \int (1 + \frac{1}{t^2}) dt = t - \frac{1}{t} = \frac{t^2-1}{t}$. Quindi $y_p(t) = \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2+1}}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{t^2-1+ct}{\sqrt{t^2+1}}$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -\frac{3}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{2t^2-3t-2}{2\sqrt{t^2+1}}$, $t > 0$.

(9) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \iff \log|y| = 2\sqrt{t} + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^{2\sqrt{t}}$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^{2\sqrt{t}}$, per cui $y'_p(t) = c'(t)e^{2\sqrt{t}} + c(t) \frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$, e quindi $\chi'(t)e^{2\sqrt{t}} + c(t) \frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = c(t) \frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \iff c'(t) = \sqrt{t} e^{-2\sqrt{t}} \implies c(t) = \int \sqrt{t} e^{-2\sqrt{t}} dt = -(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2})e^{-2\sqrt{t}}$. Quindi $y_p(t) = -(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2})$, per cui $y_{gen}(t) = ce^{2\sqrt{t}} - (t + \sqrt{t} + \frac{1}{2})$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{3}{e^2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = 3e^{2(\sqrt{t}-1)} - (t + \sqrt{t} + \frac{1}{2})$, $t > 0$.

(10) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = -\frac{1}{2} \log|t| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}$ [usando la condizione iniziale].

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{\sqrt{t}}$, per cui $y'_p(t) = \frac{c'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{c(t)}{2t^{3/2}}$, e quindi $\frac{c'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{c(t)}{2t^{3/2}} = -\frac{c(t)}{2t^{3/2}} + \sqrt{t} \iff c'(t) = t \implies c(t) = \int t dt = \frac{1}{2}t^2$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2}t^{3/2}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}t^{3/2}$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -\frac{1}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{t^2-1}{2\sqrt{t}}$, $t > 0$.

(11) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t \log t} \iff \log|y| = \log|\log t| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = c \log t$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t) \log t$, per cui $y_p'(t) = c'(t) \log t + \frac{c(t)}{t}$, e quindi $c'(t) \log t + \frac{c(t)}{t} = \frac{c(t)}{t} + \frac{1}{t} \iff c'(t) = \frac{1}{t \log t} \implies c(t) = \int \frac{dt}{t \log t} = \log |\log t|$. Quindi $y_p(t) = \log t \log |\log t|$, per cui $y_{gen}(t) = (c + \log |\log t|) \log t$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = (1 + \log \log t) \log t$, $t > 1$.

(12) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \sin t dt \iff \log |y| = -\cos t + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^{-\cos t}$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^{-\cos t}$, per cui $y_p'(t) = c'(t)e^{-\cos t} + c(t) \sin t e^{-\cos t}$, e quindi $c'(t)e^{-\cos t} + c(t) \sin t e^{-\cos t} = c(t) \sin t e^{-\cos t} + \sin t \cos^2 t \iff c'(t) = \sin t \cos^2 t e^{\cos t} \implies c(t) = \int \sin t \cos^2 t e^{\cos t} dt = -(\cos^2 t - 2 \cos t + 2)e^{\cos t}$. Quindi $y_p(t) = -(\cos^2 t - 2 \cos t + 2)$, per cui $y_{gen}(t) = ce^{-\cos t} - (\cos^2 t - 2 \cos t + 2)$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 3$, per cui $y_{Cauchy}(t) = 3e^{-\cos t} - (\cos^2 t - 2 \cos t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(13) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} t dt \iff \log |y| = -\log |\cos t| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{\cos t}$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{\cos t}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{\cos t} + c(t) \frac{\sin t}{\cos^2 t}$, e quindi $\frac{c'(t)}{\cos t} + c(t) \frac{\sin t}{\cos^2 t} = c(t) \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t \iff c'(t) = \sin t \cos t \implies c(t) = \int \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \sin^2 t$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 t}{\cos t}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{\cos t} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 t}{\cos t}$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 2$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{4 + \sin^2 t}{2 \cos t}$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(14) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg} t dt \iff \log |y| = \log |\sin t| + \tilde{c} \iff y_{om}(t) = c \sin t$.

Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t) \sin t$, per cui $y_p'(t) = c'(t) \sin t + c(t) \cos t$, e quindi $c'(t) \sin t + c(t) \cos t = c(t) \cos t + \sin t \iff c'(t) = 1 \implies c(t) = t$. Quindi $y_p(t) = t \sin t$, per cui $y_{gen}(t) = (c + t) \sin t$.

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 2 - \frac{\pi}{6}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = (2 - \frac{\pi}{6} + t) \sin t$, $t \in (0, \pi)$. □

Svolgimento esercizio 3

(1) L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ ha radici $\lambda = 1$, $\lambda = 4$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1 e^t + a_2 e^{4t}$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ -1 = y'_{gen}(0) = a_1 e^t + 4a_2 e^{4t} \Big|_{t=0} = a_1 + 4a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = \frac{5}{3}$, $a_2 = -\frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{5}{3} e^t - \frac{2}{3} e^{4t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ ha radici $\lambda = \pm 2i$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 2 = y'_{gen}(0) = 2a_2 \cos 2t \Big|_{t=0} = 2a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ ha radici $\lambda = 0$, $\lambda = -2$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 e^{-2t}$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ 0 = y'_{gen}(0) = -2a_2 e^{-2t} \Big|_{t=0} = -2a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = 1, a_2 = 0$. Allora $y_{Cauchy}(t) = 1, t \in \mathbb{R}$.

- (4) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ ha radici $\lambda = -2, \lambda = 3$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{3t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = ae^{4t} + b$. Allora $y_p'(t) = 4ae^{4t}, y_p''(t) = 16ae^{4t}$, per cui $16ae^{4t} - 4ae^{4t} - 6ae^{4t} - 6b = -e^{4t} + 6$, e quindi $a = -\frac{1}{6}, b = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{3t} - \frac{1}{6} e^{4t} - 1$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 - \frac{1}{6} - 1 \\ \frac{1}{3} = y'_{gen}(0) = -2a_1 e^{-2t} + 3a_2 e^{3t} - \frac{2}{3} e^{4t} \Big|_{t=0} = -2a_1 + 3a_2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{4t} - 1, t \in \mathbb{R}$.

- (5) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ ha radici $\lambda = -4, \lambda = 1$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-4t} + a_2 e^t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a \cos t + b \sin t + c$. Allora $y_p'(t) = -a \sin t + b \cos t, y_p''(t) = -a \cos t - b \sin t$, per cui $-a \cos t - b \sin t + 3(-a \sin t + b \cos t) - 4(a \cos t + b \sin t + c) = 4 + 17 \sin t$, e quindi $a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{5}{2}, c = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-4t} + a_2 e^t - \frac{3}{2} \cos t - \frac{5}{2} \sin t - 1$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} = y'_{gen}(0) = -4a_1 e^{-4t} + a_2 e^t + \frac{3}{2} \sin t - \frac{5}{2} \cos t \Big|_{t=0} = -4a_1 + a_2 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

cioè $a_1 = -\frac{1}{5}, a_2 = \frac{11}{5}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = -\frac{1}{5} e^{-4t} + \frac{11}{5} e^t - \frac{3}{2} \cos t - \frac{5}{2} \sin t - 1, t \in \mathbb{R}$.

- (6) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici $\lambda = \pm i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a \cos 2t + b \sin 2t$. Allora $y_p'(t) = -2a \sin 2t + 2b \cos 2t, y_p''(t) = -4a \cos 2t - 4b \sin 2t$, per cui $-4a \cos 2t - 4b \sin 2t + a \cos 2t + b \sin 2t = \sin 2t$, e quindi $a = 0, b = -\frac{1}{3}$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 0 = y'_{gen}(0) = -a_1 \sin t + a_2 \cos t - \frac{2}{3} \cos 2t \Big|_{t=0} = a_2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

cioè $a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \cos t + \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t, t \in \mathbb{R}$.

- (7) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ ha radici $\lambda = -1 \pm 2i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-t} \cos 2t + a_2 e^{-t} \sin 2t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = ae^{-t}$. Allora $y_p'(t) = -ae^{-t}, y_p''(t) = ae^{-t}$, per cui $ae^{-t} - 2ae^{-t} + 5ae^{-t} = e^{-t}$, e quindi $a = \frac{1}{4}, b = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-t} \cos 2t + a_2 e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{4} e^{-t}$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + \frac{1}{4} \\ 0 = y'_{gen}(0) = -(2a_1 + a_2)e^{-t} \sin 2t + (2a_2 - a_1)e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{4} e^{-t} \Big|_{t=0} = 2a_2 - a_1 - \frac{1}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{3}{4} e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{4} e^{-t}, t \in \mathbb{R}$.

(8) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ha radice $\lambda = -1$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a e^t$. Allora $y_p'(t) = a e^t$, $y_p''(t) = a e^t$, per cui $a e^t + 2a e^t + a e^t = e^t$, e quindi $a = \frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t} + \frac{1}{4} e^t$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + \frac{1}{4} \\ 0 = y'_{gen}(0) = -a_1 e^{-t} - a_2(t-1)e^{-t} + \frac{1}{4} e^t \Big|_{t=0} = -a_1 + a_2 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{3}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{-t} + \frac{1}{4} e^t$, $t \in \mathbb{R}$.

(9) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ ha radici $\lambda = -2$, $\lambda = -1$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{-t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a t e^{-t}$. Allora $y_p'(t) = -a(t-1)e^{-t}$, $y_p''(t) = a(t-2)e^{-t}$, per cui $a(t-2)e^{-t} - 3a(t-1)e^{-t} + 2a t e^{-t} = e^{-t}$, e quindi $a = 1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{-t} + t e^{-t}$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ \frac{1}{2} = y'_{gen}(0) = -2a_1 e^{-2t} - a_2 e^{-t} - (t-1)e^{-t} \Big|_{t=0} = -2a_1 - a_2 + 1 \end{cases}$$

cioè $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{3}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-t} + t e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(10) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$ ha radici $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 + a_2 e^t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t(at + b) = at^2 + bt$. Allora $y_p'(t) = 2at + b$, $y_p''(t) = 2a$, per cui $2a - 2at - b = t$, e quindi $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 e^t - \frac{1}{2} t^2 - t$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ 1 = y'_{gen}(0) = a_2 e^t - 1 \Big|_{t=0} = a_2 - 1 \end{cases}$$

cioè $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Allora $y_{Cauchy}(t) = -1 + 2 e^t - \frac{1}{2} t^2 - t$, $t \in \mathbb{R}$.

(11) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ ha radici $\lambda = 0$, $\lambda = 2$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 + a_2 e^{2t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a t e^{2t} + t(bt + c)$. Allora $y_p'(t) = a(2t+1)e^{2t} + 2bt + c$, $y_p''(t) = 4a(t+1)e^{2t} + 2b$, per cui $4a(t+1)e^{2t} + 2b - 2(a(2t+1)e^{2t} + 2bt + c) = e^{2t} + t - 1$, e quindi $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 e^{2t} + \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4} t$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ \frac{1}{4} = y'_{gen}(0) = 2a_2 e^{2t} + (2t+1)e^{2t} - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \Big|_{t=0} = 2a_2 + \frac{5}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4} t$, $t \in \mathbb{R}$.

(12) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 = 0$ ha radici $\lambda = 0$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t) = a_1 + a_2 t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t^2(at^2 + bt + c) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Allora $y_p'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct$, $y_p''(t) = 12at^2 + 6t + 2c$, per cui $12at^2 + 6t + 2c = t^2$, e quindi $a = \frac{1}{12}$, $b = c = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 t + \frac{1}{12} t^2$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 1 = y'_{gen}(0) = a_2 + \frac{1}{6} t|_{t=0} = a_2 \end{cases}$$

cioè $a_1 = a_2 = 1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = 1 + t + \frac{1}{12} t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

(13) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici $\lambda = \pm i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t(a \cos t + b \sin t)$. Allora $y_p'(t) = (a + bt) \cos t + (b - at) \sin t$, $y_p''(t) = (2b - at) \cos t - (2a + bt) \sin t$, per cui $(2b - at) \cos t - (2a + bt) \sin t + at \cos t + bt \sin t = \sin t$, e quindi $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 0 = y'_{gen}(0) = -a_1 \sin t + a_2 \cos t - \frac{1}{2} (\cos t - t \sin t)|_{t=0} = a_2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

cioè $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

(14) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ha radice $\lambda = -1$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t^2(at + b)e^{-t}$. Allora $y_p'(t) = (-at^3 + (3a - b)t^2 + 2bt)e^{-t}$, $y_p''(t) = (at^3 + (b - 6a)t^2 + 2(3a - 2b)t + 2b)e^{-t}$, per cui $(at^3 + (b - 6a)t^2 + 2(3a - 2b)t + 2b)e^{-t} + 2(-at^3 + (3a - b)t^2 + 2bt)e^{-t} + (at^3 + bt^2)e^{-t} = te^{-t}$, e quindi $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t} + \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = y_{gen}(0) = a_1 \\ -\frac{1}{2} = y'_{gen}(0) = -a_1 e^{-t} - a_2(t - 1)e^{-t} - \frac{1}{6} (t^3 - 3t^2)e^{-t}|_{t=0} = -a_1 + a_2 \end{cases}$$

cioè $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} - t e^{-t} + \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(15) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ ha radici $\lambda = -1 \pm 2i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-t} \cos 2t + a_2 e^{-t} \sin 2t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t(ae^{-t} \cos 2t + be^{-t} \sin 2t)$. Allora $y_p'(t) = (a - at + 2bt)e^{-t} \cos 2t + (b - 2at - bt)e^{-t} \sin 2t$, $y_p''(t) = (-2a + 4b - 3at - 4bt)e^{-t} \cos 2t + (-4a - 2b + 4at - 3bt)e^{-t} \sin 2t$, per cui $(-2a + 4b - 3at - 4bt)e^{-t} \cos 2t + (-4a - 2b + 4at - 3bt)e^{-t} \sin 2t + 2(a - at + 2bt)e^{-t} \cos 2t + 2(b - 2at - bt)e^{-t} \sin 2t + 5ate^{-t} \cos 2t + 5bte^{-t} \sin 2t = e^{-t} \cos 2t$, e quindi $a = 0$, $b = \frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-t} \cos 2t + a_2 e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{4} e^{-t} \sin 2t$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 0 = y'_{gen}(0) = -(2a_1 + a_2)e^{-t} \sin 2t + (2a_2 - a_1)e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{4} e^{-t} (-\sin 2t + 2 \cos 2t)|_{t=0} = 2a_2 - a_1 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

cioè $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{4} e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{4} e^{-t} \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

(16) L'equazione caratteristica $\lambda^3 - \lambda = 0$ ha radici $\lambda = 0, \lambda = \pm 1$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 e^t + a_3 e^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 + a_3 \\ 1 = y'_{gen}(0) = a_2 e^t - a_3 e^{-t} \Big|_{t=0} = a_2 - a_3 \\ 1 = y''_{gen}(0) = a_2 e^t + a_3 e^{-t} \Big|_{t=0} = a_2 + a_3, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 0$. Allora $y_{Cauchy}(t) = e^t - 1, t \in \mathbb{R}$.

(17) L'equazione caratteristica $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ ha radice tripla $\lambda = 1$. Quindi, $y_{gen}(t) = (a_1 + a_2 t + a_3 t^2)e^t$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 0 = y'_{gen}(0) = (a_2 + 2a_3 t + a_1 + a_2 t + a_3 t^2)e^t \Big|_{t=0} = a_1 + a_2 \\ 2 = y''_{gen}(0) = (2a_3 + a_2 + 2a_3 t + a_2 + 2a_3 t + a_1 + a_2 t + a_3 t^2)e^t \Big|_{t=0} = a_1 + a_2 + 2a_3 \end{cases}$$

cioè $a_1 = a_3 = 1, a_2 = -1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = (1 - t + t^2)e^t, t \in \mathbb{R}$.

(18) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$ ha radici $\lambda = 1, \lambda = -1 \pm i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^t + a_2 e^{-t} \sin t + a_3 e^{-t} \cos t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a t e^t$. Allora $y'_p(t) = a(t+1)e^t, y''_p(t) = a(t+2)e^t, y'''_p(t) = a(t+3)e^t$, per cui $a(t+3)e^t + a(t+2)e^t - 2a t e^t = 5e^t$, e quindi $a = 1$. Quindi $y_{gen}(t) = (a_1 + t)e^t + a_2 e^{-t} \sin t + a_3 e^{-t} \cos t$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_3 \\ 1 = y'_{gen}(0) = (a_1 + 1 + t)e^t + ((a_2 - a_3) \cos t + (-a_2 - a_3) \sin t)e^{-t} \Big|_{t=0} = a_1 + 1 + a_2 - a_3 \\ 0 = y''_{gen}(0) = (a_1 + 2 + t)e^t + ((-a_2 + a_3 - a_2 - a_3) \cos t + (a_2 + a_3 - a_2 + a_3) \sin t)e^{-t} \Big|_{t=0} = a_1 + 2 - 2a_2 \end{cases}$$

cioè $a_1 = 0, a_2 = a_3 = 1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = e^{-t}(\sin t + \cos t), t \in \mathbb{R}$.

(19) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^4 - 4\lambda^2 = 0$ ha radici $\lambda = 0$ (doppia), $\lambda = \pm 2$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 e^{2t} + a_4 e^{-2t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a t^2$. Allora $y'_p(t) = 2a t, y''_p(t) = 2a, y'''_p(t) = y^{(4)}_p(t) = 0$, per cui $-8a = 8$, e quindi $a = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 e^{2t} + a_4 e^{-2t} - t^2$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_3 + a_4 \\ 0 = y'_{gen}(0) = a_2 + 2a_3 e^{2t} - 2a_4 e^{-2t} - 2t \Big|_{t=0} = a_2 + 2a_3 - 2a_4 \\ 2 = y''_{gen}(0) = 4a_3 e^{2t} + 4a_4 e^{-2t} - 2 \Big|_{t=0} = 4a_3 + 4a_4 - 2 \\ 1 = y'''_{gen}(0) = 8a_3 e^{2t} - 8a_4 e^{-2t} \Big|_{t=0} = 8a_3 - 8a_4 \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 1, a_4 = \frac{3}{4}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t - t^2 + e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}, t \in \mathbb{R}$.

(20) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici doppie $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. Quindi, $y_{om}(t) = (a_1 + a_2 t) \sin t + (a_3 + a_4 t) \cos t$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a$. Allora $y_p'(t) = y_p''(t) = y_p'''(t) = y_p^{(4)}(t) = 0$, per cui $a = 1$. Quindi $y_{gen}(t) = (a_1 + a_2 t) \sin t + (a_3 + a_4 t) \cos t + 1$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_3 + 1 \\ 1 = y'_{gen}(0) = a_2 \sin t + (a_1 + a_2 t) \cos t + a_4 \cos t - (a_3 + a_4 t) \sin t \Big|_{t=0} = a_1 + a_4 \\ 1 = y''_{gen}(0) = a_2 \cos t - a_4 \sin t + (a_2 - a_3 - a_4 t) \cos t - (a_1 + a_4 + a_2 t) \sin t \Big|_{t=0} = 2a_2 - a_3 \\ 1 = y'''_{gen}(0) = -a_4 \cos t - a_2 \sin t - (2a_2 - a_3 + a_4 t) \sin t - (a_1 + 2a_4 + a_2 t) \cos t \Big|_{t=0} = -a_1 - 3a_4 \end{cases}$$

cioè $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = (2 + \frac{1}{2}t) \sin t - t \cos t + 1$, $t \in \mathbb{R}$. □