Numeri reali, disequazioni e induzione

1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Si consideri sul prodotto Cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la seguente relazione
$$(m, n) \sim (l, k) \iff m + k = l + n \ .$$
   (a) Provare che si tratta di una relazione di equivalenza.

   (b) Indicando con $[m, n]$ la classe di equivalenza associata a (m, n), si definiscano
$$[m, n] + [k, l] := [m + k, n + l] \ ,$$
   e
$$[m, n] \cdot [k, l] := [mk + nl, ml + nk]$$
   Provare che le opearazioni $+$ e $\cdot$ sono ben definite sulle classi di equivalenza (Ad esempio, per la somma, questo vuol dire che se $(m_1, n_1) \sim (m, n)$ allora $(m_1 + k, n_1 + l) \sim (m + k, n + l)$).

   (c) Provare che l'elemento $[m, m]$ é l'unità (lo zero) per la somma e che l'elemento $[2, 1]$ é l'unitá del prodotto (ossia il "numero uno").

   (d) Provare che ad ogni elemento $[m, n]$ ha un opposto.

2. Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Si consideri il prodotto Cartesiano $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (dove $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ indica l'insieme degli interi escluso lo zero). Si consideri la seguente relazione sugli elementi (m,n) dell'insieme $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:
$$(m, n) \sim (l, k) \iff mk = nl \ .$$
   (a) Provare che si tratta di una relazione di equivalenza.

   (b) Indicando con $[m, n]$ la classe di equivalenza associata a (m, n), si definiscano
$$[m, n] + [k, l] := [lm + nk, ln] \quad , \quad [m, n] \cdot [k, l] := [mk, ln] \ .$$
   Provare che le opearzioni $+$ e $\cdot$ sono ben definite operazioni sulle classi di equivalenza (Ad esempio, per la somma, questo vuol dire che se $(m_1, n_1) \sim (m, n)$ allora $(lm_1 + n_1 k, ln_1) \sim (lm + nk, ln)$)

   (c) Provare che l'operazione di somma ha un'unità (lo zero) e che ogni elemento ha un opposto.

   (d) Provare che l'operazione di prodotto ha un'unità e che ogni elemento diverso dallo zero della somma ha un inverso.

   (e) Indicando con $\mathbb{Q}$ l'insieme delle classi di equivalenza provare che si tratta di un campo totalemente ordinato.

3. Sia $(\mathbb{K}, +, \dot{;} \leq)$ un campo totalmente ordinato. Usando le proprietà di campo provare

   (a) $x \geq 0 \iff \bar{x} \leq 0$ dove $\bar{x}$ indica l'opposto di x rispetto alla somma;

   (b) $\bar{x} = \bar{1} \cdot x$ dove $\bar{1}$ indica l'opposto di 1

   (c) $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{K}$

   (d) $x > 0 \iff x^{-1} > 0$ dove x^{-1} indica l'inverso di x rispetto al prodotto;

4. Usando il principio di induzione dimostrare che sono vere le seguenti relazioni

(a) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \cdot b^k \ , \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(b) Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(d) (*Disuguaglianza di Bernoulli*) Per ogni $h \geq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

(e) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$$

5. **Binomio di Newton.** Il *fattoriale* di un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ è un numero naturale $n!$ definito dalle relazione

$$0! = 1 \quad , \quad n! := n\,(n-1)! \ .$$

Usando il fattoriale possiamo definire i *coefficienti binomiali*: per ogni coppia di naturali k, n tale che $k \leq n$ sia

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Si provi che valgono le seguenti relazioni

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Dimostare per induzione che vale la seguente relazione (binomio di Newton):

$$(a+b)^n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

6. Provare la seguenti disuguaglianze

(a) $2^n \leq n!$ per ogni $n \geq 4$

(b) $3^n \leq n!$ per ogni $n \geq 7$

7. Provare che i seguenti numeri sono irrazionali:

   (a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$;

   (b) $2+\sqrt{2}$, $4\cdot\sqrt{2}$, $\frac{3}{5}+8\sqrt{3}$.

8. Provare che sono vere le seguenti affermazioni:

   (a) se $p\in\mathbb{Q}$ e $r\in Irr(\mathbb{R})$ allora $p+r\in Irr(\mathbb{R})$.

   (b) se $p\in\mathbb{Q}$ e $p\neq 0$ ed $r\in Irr(\mathbb{R})$ allora $p\cdot r\in Irr(\mathbb{R})$.

9. Dire se è vera la seguente affermazione: *la somma ed il prodotto di numeri irrazionali è un numero irrazionale*. Nel caso in cui non sia vera fare degli esempi.

10. Provare che se $k\in\mathbb{N}$ con k numero primo ≥ 2 allora non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = k\ .$$
(Suggerimento: procedere come nella dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$; e usare la fattorizzazione in numeri primi dei naturali).

11. Sfruttando il predente esercizio provare che che se $k\in\mathbb{N}$ con k numero primo ≥ 2 allora non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che
$$\left(\frac{m}{n}\right)^n = k\ .$$
per ogni $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 2$.

12. Provare che $\log_3(2)$ è un irrazionale.

13. Si ricordi che se E è un insieme di numeri positivi l'allineamento decimale che definisce l'estremo inferiore α di E è definito dalle relazioni
$$a_0,a_1a_2\ldots a_n\in Min(E)\quad,\quad a_0,a_1a_2\ldots a_n+\frac{1}{10^n}\notin Min(E)\quad,\quad \forall n\in\mathbb{N}\ .$$
Si applichi questa proprietà ai seguenti insiemi
$$A:=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\geq 2\}\ ,\ B:=\{x\in\mathbb{R}\mid x^3\geq 2\}\ ,\ C:=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\geq 3\}$$
per calcolare, a meno di quattro cifre decimali, i seguenti irrazionali
$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[3]{2}\ ,\ \sqrt{3}\ .$$

14. Dire se le seguenti disuguaglianze sono vere:
$$\sqrt{2}>\frac{11}{8}\ ,\ \sqrt{\frac{3}{5}}<\frac{4}{5}\ ,\ \sqrt{\frac{6}{9}}>\frac{7}{9}\ ,\ \frac{-2+\sqrt{17}}{2}>\frac{3}{2}\ ,\ \frac{2-\sqrt{3}}{2}>\frac{2}{7}\ ,\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{\pi}}{4}>\frac{3}{2}$$

15. Calcolare sup / inf , max / min degli insiemi

   (a) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{11x-42}{x-6}>(x-6)\right\}\ \cup\ \{-1,3,4,6\}$

   (b) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{3}{x-5}\leq 1\right\}\setminus\{1,2,3,4,5\}$

(c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{x-5} \leq 1\right\} \cup \{1,2,3,4,5\}$

(d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{6}{x-6} < -1\right\} \cup \mathbb{N}$

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-6| < x^2 - 14x + 45\right\}$

(f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \leq -x^2 + 14x - 45\right\}$

(g) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x^3 - 1} \leq x + 1\right\}$

(h) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[2]{x+3} \leq x + 1\right\}$

16. Calcolare sup/inf, max/min dei seguenti insiemi

    (a) $E := \left\{\frac{n}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

    (b) $E := \left\{\frac{(-n)^n}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

    (c) $E := \left\{\frac{1}{n(2n-17)}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$