Calcolo I - Corso di Laurea in Fisica - 14 Gennaio 2021
Soluzioni Scritto

1) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}$$

a) Calcolare il dominio ed asintoti;

b) Calcolare, se esistono, estremi relativi ed assoluti.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. a) Il dominio di definizione della funzione è definito dalle condizioni:

$$1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} > 0 \quad , \quad 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \neq 1 \quad , \quad x \neq 0$$

Si vede facilmente che la prima condizione è sempre verificata mentre la seconda

$$1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \neq 1 \iff \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \neq 0 \iff \frac{2x+3}{x^2} \neq 0 \iff x \neq -3/2$$

In conclusione il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -3/2\}$.

Per quanto riguarda gli asintoti: $\boxed{x = 0^\pm}$

$$f(x) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{2}{0^\pm} + \frac{3}{(0^\pm)^2}\right)} = \frac{1}{\ln(+\infty)} = 0^+$$

in quanto il termine dominante nellargomento del logaritmo per $\to 0^\pm$ è $1/x^2$. Quindi $x = 0$ è **un punto asintotico**.

$\boxed{x = (-3/2)^\pm}$ si ha che

$$1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \overset{x \to (-3/2)^\pm}{\to} 1^\pm \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \overset{x \to (-3/2)^\pm}{\to} 0^\pm \Rightarrow f(x) \overset{x \to (-3/2)^\pm}{\to} \pm\infty$$

Quindi in $(-3/2)^\pm$ abbiamo due **asintoti verticali**.

Infine $\boxed{x \to \pm\infty}$ approssimando prima il logaritmo al secondo ordine e poi la funzione razionale risultante si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} \\
&= \left(\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-1} = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1} \\
&= \frac{x}{2}\left(1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x}{2} - 1 + o(1)
\end{aligned}$$

quindi gli **asintoti obliqui** a $\pm\infty$ hanno entrambi equazione $y = \frac{x}{2} - 1$. Nell'ultima approssimazione si è usata, per $y \to 0$, la relazione $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$ con $\alpha = -1$.

b) Per la ricerca di punti estremali della funzione deduciamo la monotonia dal segno della derivata prima dal momento che la funzione nel suo dominio di definizione 'e di classe C^∞ in quanto composizione e somma di funzioni C^∞. Quindi

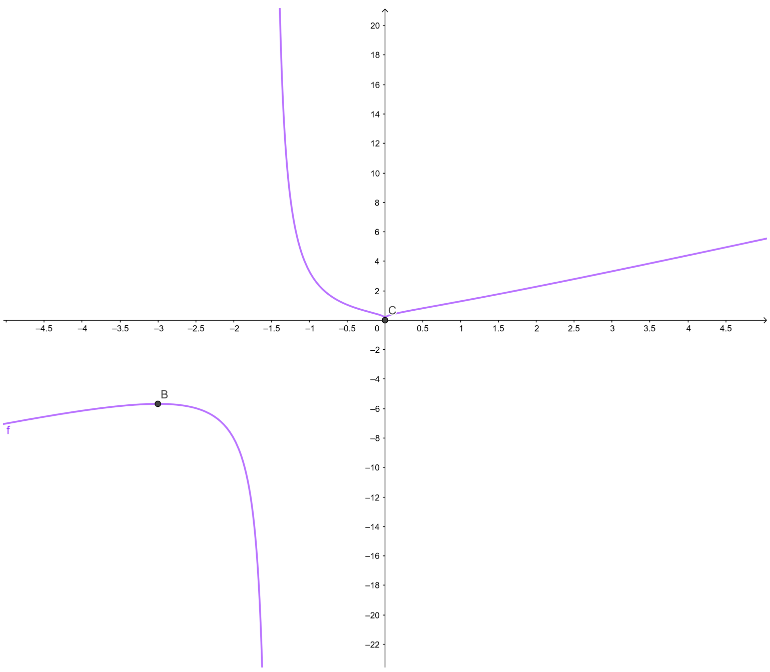
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\ln\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} \\
&= \frac{-1}{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\ln^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\left(-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right) \\
&= \frac{1}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\ln^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\left(\frac{2x+6}{x}\right)
\end{aligned}$$

da cui si deduce che il segno della derivata prima dipende solo dal termine $\left(\frac{2x+6}{x}\right)$ Quindi

$$f'(x) > 0 \quad x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty) \quad ; \quad f'(x) < 0 \quad x \in (-3, 0)$$

quindi $x = -3$ è **un massimo relativo**. $x = 0$ non appartiene al dominio di definizione. Si osservi, tuttavia, che la funzione **si può estendere per continuità** in 0 ponendo $f(0) := 0$ in quanto, come osservato prima, $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = 0$. In tal caso $x = 0$ sarebbe un minimo relativo per la funzione estesa.

Il grafico della funzione



$\square$

2) Data la funzione

$$f(x) := -\cos(x)^x + e^{x-x^2/2} - \sinh(x)$$

a) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)$;

b) Determinare se, per $x \to 0$, la funzione tende a 0 per eccesso o per difetto.

Svolgimento. Cominciamo approssimando $\sinh(x)$ al secondo ordine non banale :

$$\sinh(x) = x + x^3/6 + o(x^4) \ .$$

Approssimiamo quindi l'esponenziale fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned} e^{x-x^2/2} &= 1 + (x - x^2/2) + (1/2)(x - x^2/2)^2 + (1/6)(x - x^2/2)^3 + (1/24)(x - x^2/2)^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x - x^2/2 + x^2/2 - x^3/2 + x^4/8 + x^3/6 - x^4/4 + x^4/24 + o(x^4) \\ &= 1 + x - x^3/3 - x^4/12 + o(x^4) \end{aligned}$$

Quindi

$$e^{x-x^2/2} - \sinh(x) = 1 + x - x^3/3 - x^4/12 + o(x^4) - x - x^3/6 + o(x^4) = 1 - x^3/2 - x^4/12 + o(x^4) \ .$$

Approssimiamo infine al quarto ordine la funzione $\cos(x)^x = e^{x\ln(\cos(x))}$. Partendo dall'esponente si ha In particolare l'esponente:

$$\begin{aligned} x\ln(\cos(x)) &= x\ln(1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ &= x\left((-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) - \frac{1}{2}(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2 + o(x^4)\right) \\ &= -x^3/2 + x^5/24 - x^5/8 + o(x^5) = -x^3/2 + o(x^4) \end{aligned}$$

dove ci siamo fermati al quarto ordine. Da questo segue

$$\begin{aligned} \cos(x)^x &= e^{x\ln(\cos(x))} x\ln(\cos(x)) = e^{-x^3/2 + o(x^4)} \\ &= 1 + (-x^3/2 + o(x^4)) + (1/2)(-x^3/2 + o(x^4))^2 + o(x^6) \\ &= 1 - x^3/2 + o(x^4)) \ . \end{aligned}$$

In conclusione

$$f(x) = -1 + x^3/2 + o(x^4)) + 1 - x^3/2 - x^4/12 + o(x^4) = -x^4(12 + o(1))$$

quindi f è un'infinitesimo di ordine 4. Inoltre $f(x) = -x^4(12 + o(1)) \stackrel{x\to 0}{\to} 0^-$. $\square$

3) Studiare, al variare di x in $\mathbb{R}$, la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+5)! + 4^k (k+1)!}{k^k} (x-1)^k$$

Svolgimento. Sio tratta di una serie di potenze centrata in $x+1$. Calcoliamo il raggio di convergenza studiandone il rapporto

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+6)! + 4^{k+1}(k+2)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{(k+5)! + 4^k (k+1)!} = \frac{4^{k+1}(k+2)!(1+o(1))}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{4^k (k+1)!(1+o(1))}$$
$$= \frac{4\, 4^k (k+2)(k+1)!\, k^k}{(k+1)(k+1)^k 4^k (k+1)!}(1+o(1)) = \frac{4}{(1+1/k)^k}(1+o(1)) \overset{k\to\infty}{\to} \frac{4}{e}$$

dove, per la gerarchia degli infiniti, abbiamo approssimato il numeratore nel seguente modo

$$(k+6)! + 4^{k+1}(k+2)! = (k+2)!((k+6)(k+5)(k+4)(k+3) + 4^{k+1}) = (k+2)! 4^{k+1}(1+o(1))$$

e in maniera analoga si è approssimato il denominatore. Quindi il raggio di convergenza è $r = e/4$ e la serie converge assolutamente nell'intervallo $(1-e/4, 1+e/4)$ mentre non converge nell'insieme $(-\infty, 1-e/4) \cup (1+e/4, +\infty)$.

Per quanto riguarda i punti di frontiera $1-e/4, 1+e/4$, per $x = 1+e/4$ la successione dei termini della serie diventa

$$\frac{(k+5)! + 4^k (k+1)!}{k^k} \left(\frac{e}{4}\right)^k = \frac{4^k (k+1)!(1+o(1))}{k^k} \left(\frac{e}{4}\right)^k = \frac{(k+1)k!\, e^k (1+o(1))}{k^k}$$
$$= \frac{(k+1)k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}\, e^k}{k^k}(1+o(1)) = (k+1)\sqrt{2\pi k}(1+o(1)) \to \infty\ .$$

Quindi per $x = 1+e/4$ la serie non può convergere in quanto non è verificata la condizione necessaria per la convergenza. Per la stessa ragione si vede la serie $x = 1-e/4$ non può convergere:

$$(-1)^k \frac{(k+5)! + 4^k (k+1)!}{k^k} \left(\frac{e}{4}\right)^k = (-1)^k (k+1)\sqrt{2\pi k}(1+o(1)) \to \nexists\ .$$

□

4) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(-\infty, 0)$ della funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(1-e^{2x})}{e^x(1-e^x)^\alpha} \ .$$

Calcolare l'integrale per $\alpha = 0$ ossia $\int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-e^{2x})}{e^x} dx$.

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio: l'intervallo di integrazione non è limitato, mentre per $x = 0$ il numeratore diverge ed il denominatore si annulla. Negli intervalli $[a, b]$ per ogni $-\infty < a < b < 0$ la funzione è continua e limitata quindi integrabile. Inoltre dato che la funzione è definitivamente di segno costante sia in 0 che ha $-\infty$ possiamo applicare il confronto asintotico per lo studio dell'integrabilità in senso improprio.

Per $\boxed{x \to -\infty}$, osservando che $e^{2x} \to 0$, approssimando il logaritmo, si ha

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(1-e^{2x})}{e^x(1-e^x)^\alpha} = \frac{-e^{2x}(1+o(1))}{e^x(1+o(1))} = -e^x(1+o(1))$$

quindi f_α è integrabile a $-\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $\boxed{x \to 0^-}$, si ha

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(1-e^{2x})}{e^x(1-e^x)^\alpha} = \frac{\ln(-2x(1+o(1))}{x^\alpha(1+o(1))} = \frac{\ln(-x)}{(-x)^\alpha}(1+o(1))$$

da cui segue che in $x = 0$ la funzione è integrabile in senso improprio se, e solo se, $\alpha < 1$. In conclusione f_α è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(-\infty, 0)$ se, e solo se, $\alpha \in (-\infty, 1)$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$. Sostituendo $t = e^x$, $\frac{dt}{t} = dx$ ed integrando per parti si ha

$$\int \frac{\ln(1-e^{2x})}{e^x} dx = \int \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -\frac{\ln(1-t^2)}{t} - \int \frac{2}{1-t^2} dt$$

Calcoliamo il secondo termine

$$\int \frac{2}{1-t^2} dt = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$$

da cui segue che una primitiva nella variabile t è la funzione

$$F(t) = -\frac{\ln(1-t^2)}{t} - \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$$

Osservano che nella variabile t il dominio di integrazione è l'intervallo $(0, 1)$, si ha

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-e^{2x})}{e^x} dx = \lim_{t \to 1^-} F(t) - \lim_{t \to 0^+} F(t)$$

Per $t \to 1^-$ si ha

$$\begin{aligned} F(t) &= -\frac{\ln(1-t^2)}{t} - \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = -\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln(1-t)}{t} - \ln(1+t) + \ln(1-t) \\ &= -\ln(2)(1+o(1)) + \ln(1-t)\left(-\frac{1}{t} + 1\right) = -\ln(2)(1+o(1)) + \ln(1-t)\frac{t-1}{t} \to -\ln(2) \end{aligned}$$

Mentre per $t \to 0$ si ha

$$F(t) = -\frac{\ln(1-t^2)}{t} - \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \frac{t^2(1+o(1))}{t} + o(1) \to 0$$

In conclusione

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(1-e^{2x})}{e^x} dx = \lim_{t\to 1^-} F(t) - \lim_{t\to 0^+} F(t) = -\ln(2)$$

$\square$

5) *Data l'equazione differenziale*

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^t \ .$$

determinare la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x}(0) = x(0) = 0$.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Calcoliamo la soluzione generale dell'omogenea $\ddot{x}-3\dot{x}+2x = 0$. Il polinomio caratteristico associato all'omogena è $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ che ha radici $\lambda = 1, 2$. Quindi

$$x_{om}(t) = Ae^t + Be^{2t}$$

Calcoliamo ora una soluzione particolare usando il metodo della similitudine. Dalla forma del termine noto si evince che c'e' "risonanza" in quanto 1 è radice del polinomio caratteristico. Quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y(t) = t(K + Dt)e^t = (Kt + Dt^2)e^t \ .$$

Imponiamo che $y(t)$ verifichi la soluzione generale osservando, per semplificare i calcoli, che e^t è soluzione dell'omogenea:

$$\ddot{y}-3\dot{y}+2y = te^t \iff 2De^t+2(K+2Dt)e^t+(Kt+Dt^2)e^t-3(K+2Dt)e^t-3(Kt+Dt^2)e^t+2(Kt+Dt^2)e^t = te^t$$

ossia

$$\iff 2De^t + 2(K + 2Dt)e^t - 3(K + 2Dt)e^t = te^t \iff 2D + 2(K + 2Dt) - 3(K + 2Dt) = t$$

$$\iff (2D+2K-3K)+t(4D-6D) = t \iff (2D-K) = 0\,, -2D = 1 \iff D = -1/2\ ,\ K = -1$$

Quindi la soluzione particolare è

$$y(t) = -t(1 + t/2)e^t$$

e la soluzione generale

$$x_{Gen}(t) = Ae^t + Be^{2t} - t(1 + t/2)e^t$$

Imponiamo infine il rpoblema di Cauchy

$$x(0) = 0 = A + B = 0 \ \ , \ \ \dot{x}(0) = 0 = A + 2B - 1 \iff B = 1\ ,\ A = -1$$

Quindi

$$x_{Cauchy}(t) = -e^t + e^{2t} - t(1 + t/2)e^t$$

□