Calcolo I - Corso di Laurea in Fisica - 23 Giugno 2021
Soluzioni Scritto

1) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x)}{x^2 - 3x}$$

a) Calcolare il dominio, asintoti ed eventuali punti di non derivabilità;

b) Calcolare, se esistono, estremi relativi ed assoluti.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Svolgimento. Il dominio di definizione D della funzione è dato dalla condizione

$$x^2 - 3x > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

La funzione risulta inoltre $C^\infty(D)$. Per quanto rigurda gli asintoti $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x)}{x^2 - 3x} = \frac{\ln(x^2)(1 + o(1))}{x^2(1 + o(1))} = \frac{2\ln(|x|)}{x^2}(1 + o(1)) \to 0^+ \ ,$$

quindi a $\pm\infty$ ci sono due asintoti orizzontali di equazione $y = 0$. Mentre $x \to 3^+$

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x)}{x^2 - 3x} = \frac{\ln(x) + \ln(x - 3)}{x(x - 3)} = \frac{\ln(3) + \ln(0^+)}{0^+} = -\infty \ .$$

Quindi per $x = 3^-$ c'e' un asintoto verticale. Stessa cosa si verifica per $x = 0^-$.

Per quanto rigurda la monotonia si ossevi che

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2} - \frac{\ln(x^2 - 3x)(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2} = (2x - 3)\frac{1 - \ln(x^2 - 3x)}{(x^2 - 3x)^2} \ .$$

Il segno della derivata prima dipende solo dal numeratore

$$f'(x) > 0 \iff (2x - 3)(1 - \ln(x^2 - 3x)) > 0$$

Per il primo fattore si osservi che $(2x - 3) > 0 \iff x > 3/2$. Per il secondo fattore

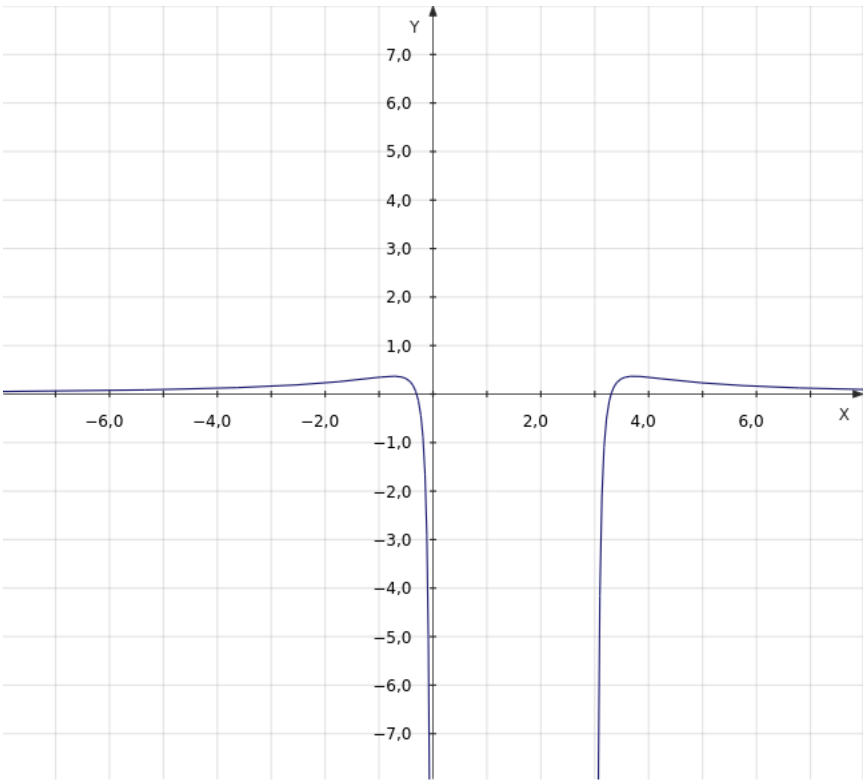
$$(1-\ln(x^2-3x)) > 0 \iff 1 > \ln(x^2-3x) \iff x^2-3x < e \iff x \in \left(\frac{3 - \sqrt{9 + 4e}}{2}, \frac{3 + \sqrt{9 + 4e}}{2}\right)$$

Mettendo insieme i risultati con il dominio della funzione si ha

- f crescente per $x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{9+4e}}{2}) \cup (3, \frac{3+\sqrt{9+4e}}{2})$
- f decrescente per $x \in (\frac{3-\sqrt{9+4e}}{2}, 0) \cup (\frac{3+\sqrt{9+4e}}{2}, +\infty)$

Quindi i punti $\frac{3\pm\sqrt{9+4e}}{2}$ sono dei massimi relativi

In conclusione il grafico della funzione



$\square$

2) Data la funzione

$$f(x) := \sin(x^{2/3}) \cdot \sqrt[3]{e^x - 1}$$

(a) *Provare che $f(x)$ è derivabile in $x = 0$ e calcolarne la derivata.*

(b) *Provare che $f(x)$ è invertibile in un intorno di $x = 0$ e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto immagine $y = f(0)$.*

Svolgimento. Si tratta di una funzione continua definita su $\mathbb{R}$. Inoltre f è sicuramente derivabile (infinite volte) nei punti in cui non si annulla la radice. La radice infatti è l'unica funzione coinvolta nella definizione di f che presenta dei problemi per quanto riguarda la derivabilità, precisamente nei punti in cui si annulla il suo argomento. In questo caso $x = 0$. Per verificare che f è derivabile in $x = 0$ possiamo applicare il corollario del teorema di lagrange, in quanto f è continua in 0 e derivabile in un intorno di 0. Quindi se esiste il limite ℓ della derivata prima e $\ell \in \mathbb{R}$ allora f risulta derivabile con derivata ℓ. Si osservi che per $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}\cos(x^{2/3}) \cdot \sqrt[3]{e^x - 1} + \frac{e^x}{3}\sin(x^{2/3}) \cdot (e^x - 1)^{-2/3}$$

per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-1/3}(1 + o(1)x^{1/3}(1 + o(1)) + \frac{1 + o(1)}{3}(x^{2/3} + o(x^{2/3})x^{-2/3}(1 + o(1)) \\ &= \frac{2}{3}(1 + o(1)) + \frac{1 + o(1)}{3}(1 + o(1)) \\ &= 1 + o(1) \to 1 \end{aligned}$$

dove è stato sufficiente approssimare $\cos(x) = 1 + o(1)$ e $e^x = 1 + o(1)$. Quindi f risulta derivabile con $f'(0) = 1$. Inoltre il calcolo appena effettuato ci dice che f' è continua in 0. Quindi per il teorema della permanenza del segno $f' > 0$ in un inotrno di 0, quindi f è strettamente crescente in tale intorno ossia invertibile. Ora $y = f(0) = 0$. Dal teorema della derivata dell funzione inversa si ha

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y = 0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

$\square$

3) *Data la serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)x^k$$

a) Studiare la convergenza semplice ed assoluta al variare di $x \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare la somma della serie per $x = 1/2$.

Svolgimento. a) Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$(|a_k|)^{1/k} = \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1/k} = \exp\left(\frac{1}{k}\ln\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{k2^{k+1}}(1+o(1)\right) \overset{k\to\infty}{\to} 1$$

quindi il reaggio di convergenza è $r = 1$ e la serie converge assolutamente nell'intervallo $(-1, 1)$ mentre non converge nell'insieme $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Per quanto riguarda i punti di frontiera $-1, 1$, per $x = -1$ la serie diventa

$$a_k = (-1)^k\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right) \overset{k\to\infty}{\to} \nexists \quad , \quad |a_k| = \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right) \overset{k\to\infty}{\to} 1$$

quindi sia per $x = 1$ che per $x = -1$ *non è verificata la condizione necessaria* per la convergenza della serie, quindi per tali valori la serie non converge.

b) Per il calcolo della somma per $x = 1/2$ si osservi che la serie è una somma di due serie geometriche:

$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^k = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

quindi

$$S(1/2) = \frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{2+1/2} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

□

4) Discutere, al variare di $\alpha \geq 0$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0, +\infty)$ della funzione

$$f_\alpha(t) = \frac{\ln(t^2+1)\cdot\left(\sqrt{t}+\ln(\sqrt[3]{t}+1)\right)^\alpha}{t^2\cdot\ln^{2\alpha}(t+1)}$$

Calcolare l'integrale per $\alpha = 0$ ossia $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2+1)}{t^2}\, dt$.

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio: l'intervallo di integrazione non è limitato e il denominatore si annulla in $t = 0$. Negli intervalli $[a, b]$ per ogni $0 < a < b < +\infty$ la funzione è continua e limitata quindi integrabile. Inoltre dato che la funzione è definitivamente di segno costante sia in 0 che ha $+\infty$ possiamo applicare il confronto asintotico per lo studio dell'integrabilità in senso improprio.

Per $\boxed{t = +\infty}$ si ha

$$f_\alpha(t) = \frac{\ln(t^2+1)\cdot\left(\sqrt{t}+\ln(\sqrt[3]{t}+1)\right)^\alpha}{t^2\cdot\ln^{2\alpha}(t+1)} = \frac{2\ln(t)t^{\alpha/2}}{t^2\ln^{2\alpha}(t)}(1+o(1)) = \frac{2(1+o(1))}{t^{2-\alpha/2}\ln^{2\alpha-1}(t)} \ .$$

Quindi f_α è integrabile a $+\infty$ se

$$2-\alpha/2 > 1 \iff \alpha < 2$$

Inoltre per $\alpha = 2$ si osservi che

$$f_2(t) = \frac{2(1+o(1))}{t\ln^3(t)}$$

quindi a $+\infty$ la funzione risulta integrabile anche per $\alpha = 2$ in quanto l'esponente del logaritmo a denominatore è strettamente maggiore di 1.

Per $\boxed{t = 0}$ si ha

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &= \frac{\ln(t^2+1)\cdot\left(\sqrt{t}+\ln(\sqrt[3]{t}+1)\right)^\alpha}{t^2\cdot\ln^{2\alpha}(t+1)} = \frac{t^2(1+o(1))\cdot\left(\sqrt{t}+t^{1/3}+o(t^{1/3})\right)^\alpha}{t^2t^{2\alpha}(1+o(1))} \\ &= \frac{t^{2+\alpha/3}}{t^{2+2\alpha}}(1+o(1)) = \frac{1}{t^{2\alpha-\alpha/3}}(1+o(1)) \ , \end{aligned}$$

da cui segue che f_α è integrabile in $t = 0$ se e solo se

$$2\alpha-\alpha/3 < 1 \iff \alpha(2-1/3) < 1 \iff \alpha < \frac{3}{5}$$

In conclusione la funzione è integrabile in senso improprio in $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha < \frac{3}{5}$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$. Integrando per parti si ha

$$F(t) = \int \frac{\ln(t^2+1)}{t^2}\, dt = -\frac{\ln(t^2+1)}{t} + \int \frac{2}{(t^2+1)} = -\frac{\ln(t^2+1)}{t} + 2\arctan(t) + C$$

Infine

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2+1)}{t^2}\, dt = \lim_{t\to+\infty} F(t) - \lim_{x\to 0^+} F(t) = \pi - 0 = \pi$$

□

__5)__ Data l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{x^2}{t\ln(t)} \ ,$$

trovare le soluzione, specificandone il dominio, del problema di Cauchy: $x(e) = 1$.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione a variabili separabili il cui dominio è

$$D = \mathbb{R} \times (0,1) \cup (1,+\infty) \ .$$

Per determinare la soluzione associata al problema di Cauchy procediamo separando le variabili:

$$\int_1^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_e^t \frac{1}{t\ln(t)} dt \iff -\frac{1}{x}\Big|_1^{x(t)} = \ln|\ln|t||\Big|_e^t \iff -\frac{1}{x(t)} + 1 = \ln|\ln|t||$$

ossia

$$x(t) = \frac{1}{1 - \ln|\ln|t||}$$

Per togliere il modulo si osservi che il dominio dell'equazione nella variabile t è $(0,1) \cup (1,+\infty)$ e che la soluzione del problema di Cauchy è definita nel sotto intervallo in cui si trova il dato iniziale $t_0 = e$ ossia l'intervallo $(1,+\infty)$. Quindi

$$x(t) = \frac{1}{1 - \ln(\ln(t))} \ , \qquad t \in (1,+\infty)$$

Infine per calcolare il dominio dobbiamo imporre che il denominatore non si annulli per $t \in (1,+\infty)$:

$$1 - \ln(\ln(t)) \neq 0 \iff 1 \neq \ln(\ln(t)) \iff \ln(t) \neq e \iff t \neq e^e \iff t \in (1,e^e) \cup (e^e,+\infty)$$

In conclusione il dominio della soluzione è il sottointervallo intervallo che contiene il dato iniziale $t_0 = e$, ossia $(1,e^e)$. Quindi

$$\boxed{x_{Cauchy}(t) = \frac{1}{1 - \ln(\ln(t))} \ , \qquad t \in (1,e^e) \ .}$$

□