**Calcolo I - Corso di Laurea in Fisica - 19 Febbraio 2021**
**Soluzioni Scritto**

***1)*** *Data la funzione*

$$f(x) = \left(x^3 - x^2 + |x|x\right)^{\frac{1}{3}}$$

*a) Calcolare il dominio, asintoti ed eventuali punti di non derivabilità;*

*b) Calcolare, se esistono, estremi relativi ed assoluti.*

*Tracciare un grafico qualitativo della funzione. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.*

*Svolgimento.* $a$) Il dominio di definizione della funzione è $\mathbb{R}$. Per $x \to \pm\infty$ si osservi che

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^3 - x^2 + |x|x\right)^{\frac{1}{3}} = x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{|x|}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x\left(1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x} + \frac{|x|}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - \frac{1}{3} + \frac{|x|}{3x} + o(1) = x + \frac{1}{3}(-1 + segno(x)) + o(1) = \end{aligned}$$

Quindi $\boxed{y = x}$ è l'asintoto obliquo a $+\infty$, mentre $\boxed{y = x - 2/3}$ è l'asintoto obliquo a $-\infty$

Per quanto riguarda la monotonia, si osservi che la funzione è continua in tutto il suo dominio, mentre ad eccezione di $x = 0$ e dei punti in cui si annulla l'argomento della radice è una funzione di classe $C^\infty$. Per capire quali sono i punti in cui la derivata presenta dei problemi sciogliamo il modulo:

$$f(x) := \begin{cases} x\ , & x \geq 0 \\ (x^2(x-2))^{1/3}\ , & x < 0 \end{cases}$$

Quindi l'unico punto in cui la funzione potrebbe non essere derivabile è $x = 0$. Studieremo la derivabilità in $x = 0$ subito dopo aver studiato la monotonia. Per $\boxed{x > 0}$ si osservi che $f'(x) = 1$ quindi la funzioni è sempre crescente. Per $\boxed{x < 0}$ invece

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4x}{3(x^2(x-2))^{2/3}} = \frac{x(3x-4)}{3(x^2(x-2))^{2/3}} > 0\ ,\ \forall x < 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente nella regione $x < 0$. Quindi non ci sono ne massimi ne minimi relativi.

Per quanto riguarda la derivabilità in $x = 0$, essendo $f$ continua usiamo il corollario del Teorema di Lagrange:

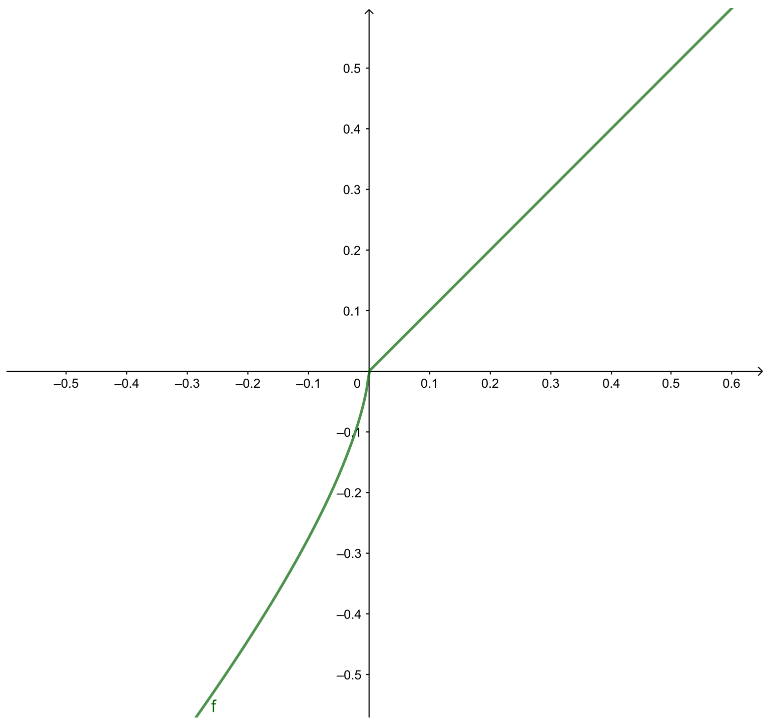
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 = f'_+(0)$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(3x-4)}{3(x^2(x-2))^{2/3}} = \frac{1}{x^{1/3}} \frac{(3x-4)}{(3(x-2))^{2/3}} = +\infty = f'_-(0)$$

Chiaramente la funzione non è derivabile in $x = 0$.

Il grafico della funzione


f

□

*2) Data la funzione*

$$f(x) := \begin{cases} \cosh(x) \ , & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{\sin\left(x+\frac{2}{3}x^3\right)\cos(x) - x\ \exp(x^6)}{b\, x^a} \ , & x > 0 \end{cases}$$

*determinare per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è continua in $\mathbb{R}$.*

*Svolgimento.* La funzione è continua nella regione $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ in quanto le due funzioni che definiscono $f(x)$ negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0+\infty)$ sono continue. Quindi la continutà va verificata solo in $x = 0$. Si osservi che

$$f(0) = \cosh(0) = 1$$

e che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cosh(x) = 1$. Quindi dobbiamo imporre che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. A tale fine bisogna a conoscere l'ordine di infinitesimo del numeratore:

$$h(x) := \sin\left(x + \frac{2}{3}x^3\right)\cos(x) - x\ \exp(x^6) \ .$$

Si osservi che

$$x\exp(x^6) = x + x^7 + o(x^7) \ ,$$

quindi ci aspettiamo che il contributo principale venga dal primo addendo:

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \frac{2}{3}x^3\right)\cos(x) &= \left(\left(x + \frac{2}{3}x^3\right) + -\frac{1}{6}\left(x + \frac{2}{3}x^3\right)^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \left(x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= x + o(x^3) \ .
\end{aligned}$$

Questo approssimazione non è sufficiente per determinare l'ordine di infinitesimo del numeratore in quanto

$$h(x) = x + o(x^3) - x - x^7 + o(x^7) = o(x^3)$$

bisogna quindi portare sia il seno che il coseno all'ordine successivo:

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \frac{2}{3}x^3\right)\cos(x) &= \left(\left(x + \frac{2}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{2}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x + \frac{2}{3}x^3\right)^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= \left(x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{39}{120}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= x + \frac{1}{4!}x^5 - \frac{1}{4}x^5 - \frac{79}{5!}x^5 + o(x^5) = x + \frac{5 - 30 - 39}{120}x^5 + o(x^5) = x - \frac{64}{120}x^5 + o(x^5) \\
&= x - \frac{8}{15}x^5 + o(x^5) \ .
\end{aligned}$$

$$h(x) = x - \frac{8}{15}x^5 + o(x^5) - x - x^7 + o(x^7) = -\frac{8}{15}x^5 + o(x^5) \ .$$

Quindi la funzione è continua in 0 se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{8}{15}x^5 + o(x^5)}{b\,x^a} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{8}{15b}x^{5-a}(1+o(1)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{a = 5\ ,\ \ b = -\frac{8}{15}}$$

$\square$

***3)*** *Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice ed assoluta della serie di potenze*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k\,(k+1)^k}\, x^k$$

*Svolgimento.* Calcoliamo il raggio di convergenza. Posto

$$a_k = \frac{k^k}{k\,(k+1)^k}$$

per $k \to \infty$ si ha

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k}\right)^{1/k} = \frac{k}{k+1}(1+o(1)) \to 1$$

Quindi il raggio di convergenza è 1 e la serie converge assolutamente per $x \in (-1, 1)$.

Per quanto riguarda i punti di frontiera, per $x = 1$ si ha

$$a_k(1)^k = \frac{k^k}{k\,(k+1)^k} = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \frac{1}{ek}(1+o(1))$$

in quanto $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$ è la successione di Bernoulli che converge a $e^{-1}$. Quindi per $x = 1$ la serie non converge in quanto è asintotica alla serie armonica.

Per $x = -1$ si ha una serie a termini di segno alterno $\sum_k a_k(-1)^k$. Abbiamo già osservato che

$$a_k = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \frac{1}{ek}(1+o(1)) \to 0$$

Si osservi, inoltre, che la successione di Bernoulli $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ è monotona crescente; quindi $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$ è decrescente e, dato che anche $1/k$ è decrescente e positiva, anche

$$a_k = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$$

è decrescente. Per il criterio di Leibniz $a_k(-1)^k =$ converge semplicemente. In conclusione la serie converge assolutamente per $x \in (-1, 1)$ e semplicemente per $x \in [-1, 1)$. □

*4) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(1,+\infty)$ della funzione*

$$f_\alpha(t) = \frac{t^3 \ln(t^2-1)}{(t^4+1)^2 \ln^\alpha(t)} \ .$$

*Calcolare l'integrale per $\alpha = 0$ ossia $\int_1^{+\infty} \frac{t^3 \ln(t^2-1)}{(t^4+1)^2} dt$.*

*Svolgimento.* L'integrale va definito in senso improprio in quanto l'intervallo di integrazione non è limitato è percheè per $\alpha > 0$ il denominatore si annulla per $t = 1$. Negli intervalli $[a, b]$ per ogni $1 < a < b < \infty$ la funzione è continua e limitata quindi integrabile. Inoltre dato che la funzione è definitivamente di segno costante sia in 1 che a $\infty$ possiamo applicare il confronto asintotico per lo studio dell'integrabilità in senso improprio.

Per $\boxed{t \to \infty}$ si ha

$$f_\alpha(t) = \frac{t^3 \ln(t^2-1)}{(t^4+1)^2 \ln^\alpha(t)} = \frac{t^3 2\ln(t)}{t^8 \ln^\alpha(t)}(1+o(1)) = \frac{2}{t^5 \ln^{\alpha-1}(t)}(1+o(1))$$

quindi $f_\alpha$ è integrabile a $\infty$ indipendentemente da $\alpha$ in quanto l'esponente della potenza a denominatore è $5 > 1$.

Per $\boxed{x \to 1^+}$, si ha

$$f_\alpha(t) = \frac{t^3 \ln(t^2-1)}{(t^4+1)^2 \ln^\alpha(t)} = \frac{\ln((t-1)(t+1))}{4\ln^\alpha(1+(t-1))}(1+o(1)) = \frac{\ln(2(t-1))}{4(t-1)^\alpha}(1+o(1))$$

da cui segue che in $t = 1$ la funzione è integrabile in senso improprio se, e solo se, $\alpha < 1$. In conclusione $f_\alpha$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(1,+\infty)$ se, e solo se, $\alpha \in (-\infty, 1)$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$. Sostituendo $x = t^2$, $dx = 2tdt$ ed integrando per parti si ha

$$\int \frac{t^3 \ln(t^2-1)}{(t^4+1)^2} dt = \int \frac{x \ln(x-1)}{2(x^2+1)^2} dx = -\frac{\ln(x-1)}{4(x^2+1)} + \int \frac{1}{4(x^2+1)(x-1)}$$

Calcoliamo il secondo termine scomponendo in fratti semplici

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Da cui seguno immediatamente

$$A = \frac{1}{2} \ , \ B = -A = -1/2 \ , \ -1 = -A + C \iff C = -1/2$$

dove la prima relazione è stata ottenuta moltiplicando entrambe i membri per $x - 1$ e ponendo $x = 1$, la seconda moltiplicando per $x$ entrambe i membri e mandando tutto a $+\infty$, la terza ponendo $x = 0$. Quindi

$$\int \frac{1}{4(x^2+1)(x-1)} = \int \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8}\int \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{16}\int \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{16}\ln(x^2+1) - \frac{1}{8}\arctan(x) \ .$$

In conclusione una primitiva della funzione integranda espressa nella variabile $x$ è

$$F(x) = -\frac{\ln(x-1)}{4(x^2+1)} + \frac{1}{16}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{8}\arctan(x)$$

Quindi osservando che il dominio di integrazione nella variabile $x$ è sempre $(1, +\infty)$ si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^3 \ln(t^2-1)}{(t^4+1)^2} dt = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to 1^+} F(x) \ .$$

Ora

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0 + 0 - \frac{1}{8}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{16}$$

Mentre per $x \to 1^+$

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{\ln(x-1)}{4(x^2+1)} + \frac{1}{8}\ln(x-1) - \frac{1}{16}\ln(x^2+1) - \frac{1}{8}\arctan(x) \\ &= \frac{1}{8}\ln(x-1)\left(-\frac{2}{x^2+1} + 1\right) - \frac{1}{16}\ln(x^2+1) - \frac{1}{8}\arctan(x) \\ &= \frac{1}{8}\ln(x-1)\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) - \frac{1}{16}\ln(x^2+1) - \frac{1}{8}\arctan(x) \\ &= \frac{1}{8}(\ln(x-1))(x-1)\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) - \frac{1}{16}\ln(x^2+1) - \frac{1}{8}\arctan(x) \to -\frac{\ln(2)}{16} - \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^3 \ln(t^2-1)}{(t^4+1)^2} dt = -\frac{\pi}{16} + \frac{\ln(2)}{16} + \frac{\pi}{32} = \frac{\ln(2)}{16} - \frac{\pi}{32} \ .$$

$\square$

*5) Data l'equazione differenziale*
$$\dot{x} = \frac{x}{t+1} + \frac{1}{t-2} \ .$$
*Trovare la soluzione, specificandone il dominio, del problema di Cauchy* $x(1/2) = 1$.

*Svolgimento.* Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine con dominio
$$(x,t) \in \mathbb{R} \times \Big( (-\infty,-1) \cup (-1,2) \cup (2,+\infty) \Big) \ .$$
Calcoliamo la soluzione generale dell'omogenea $\dot{x} = \frac{x}{t+1}$ separando le variabili
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|x| = \ln|t+1| + D \ \Longleftrightarrow \ x(t) = K(t+1)$$
dove abbiamo tolto il modulo facendo variare la costante $K$ in $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la particolare tramite la variazione della costante:
$$y(t) = K(t)(t+1) \ \Rightarrow \dot{y} = \dot{K}(t+1) + K = K + \frac{1}{t-2} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{K} = \frac{1}{(t+1)(t-2)} \ .$$
Quindi
$$K(t) = \int \frac{1}{(t+1)(t-2)} = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{t+1} + \frac{1}{3} \int \frac{1}{t-2} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-2}{t+1} \right| \ .$$
Quindi la soluzione particolare è
$$y(t) = \frac{(t+1)}{3} \ln \left| \frac{t-2}{t+1} \right|$$
mentre la soluzione generale
$$x_{Gen}(t) = K(t+1) + \frac{(t+1)}{3} \ln \left| \frac{t-2}{t+1} \right| = (t+1) \left( K + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-2}{t+1} \right| \right)$$
Imponiamo la condizione di Cauchy osservando che il dato iniziale $t = 1/2$ cade nell'intervallo $(-1,2)$ del dominio. Quindi, essendo l'equazione lineare, il dominio della soluzione del problema di Cauchy sarà esattamente $(-1,2)$. Allora
$$x_{Gen}(1/2) = 1 = (3/2)K \ \Longleftrightarrow \ K = 2/3 \ .$$
Quindi
$$x_{Cauchy} = (t+1) \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \ln \frac{2-t}{t+1} \right)$$
dove abbiamo tolto il modulo osservando che $\frac{2-t}{t+1} > 0$ per $t \in (-1,2)$. $\square$