Calcolo I - Corso di Laurea in Fisica - 12 Luglio 2021
Soluzioni Scritto

1) *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\ln(x^2 + x + 1)}$$

a) Calcolare il dominio, asintoti ed eventuali punti di non derivabilità;

b) Calcolare, se esistono, estremi relativi ed assoluti.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Svolgimento. Il dominio di definizione D della funzione è definito dalle condizioni

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad , \quad \ln(x^2 + x + 1) \neq 0 \iff x^2 + x + 1 \neq 1 \ .$$

mentre la prima condizione è sempre verificata, la seconda condizione è verificata per

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty) \ \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \ .$$

Per quanto riguarda gli asintoti si osservi che $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\ln(x^2 + x + 1)} = \frac{x^2}{2\ln(|x|)}(1 + o(1)) \to +\infty$$

ma non ci sono asintoti obliqui in quanto la funzione non é un infinito di ordine 1. Per quato riguarda gli asintoti orizzontali si ha $x \to 0^\pm$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\ln(x^2 + x + 1)} = \frac{1 + o(1)}{\ln(1 + x + o(x))} \stackrel{x \to 0^\pm}{\to} \frac{1}{\ln(1^\pm)} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$$

mentre per $x \to -1^\pm$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\ln(x^2 + x + 1)} = \frac{1 + o(1)}{\ln(1 + x(1 + x))} \stackrel{x \to -1^\pm}{\to} \frac{1}{\ln(1^\mp)} = \frac{1}{0^\mp} = \mp\infty$$

Per la monotonia si ossevi che la funzione è di classe $C^\infty(D)$. Studiamo quindi il segno della derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{\ln(x^2 + x + 1)} - \frac{(2x + 1)}{\ln^2(x^2 + x + 1)} = \frac{2x + 1}{\ln^2(x^2 + x + 1)}(\ln(x^2 + x + 1) - 1)$$

Il segno della derivata prima dipende solo dal numeratore

$$f'(x) > 0 \iff (2x + 1)(\ln(x^2 + x + 1) - 1) > 0$$

Per il primo fattore si osservi che $(2x + 1) > 0 \iff x > -1/2$. Per il secondo fattore

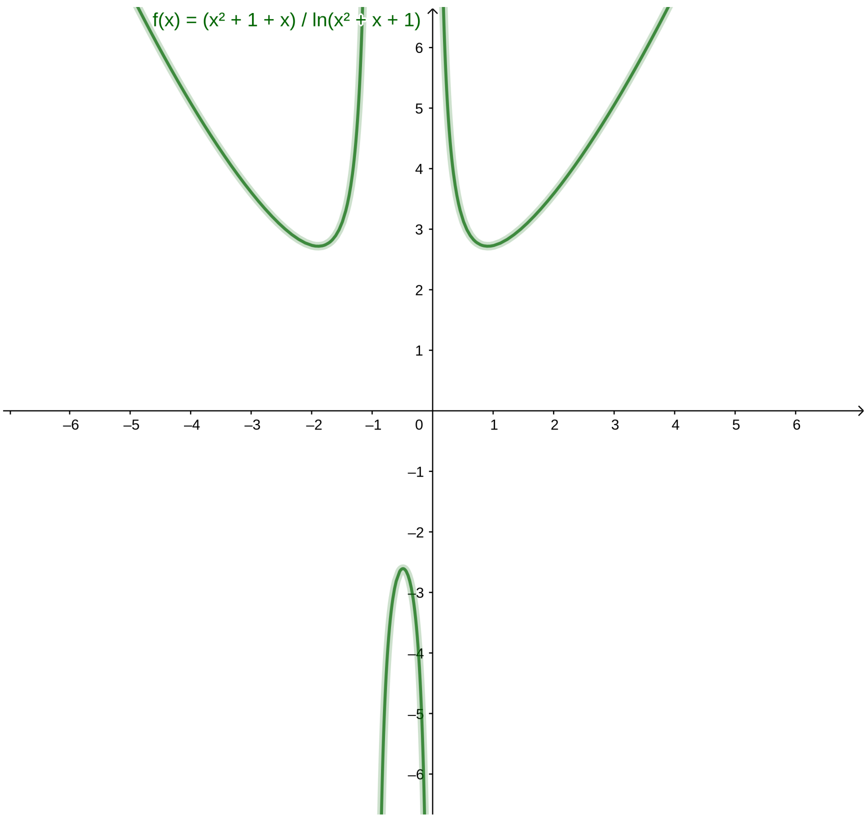
$$(\ln(x^2+x+1)-1) > 0 \iff x^2+x+1-e > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{4e - 3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{4e - 3}}{2}, +\infty\right)$$

Mettendo insieme i risultati con il dominio della funzione si ha

- f crescente per $x \in (\frac{-1-\sqrt{4e-3}}{2}, -1) \cup (-1, -1/2) \cup (\frac{-1+\sqrt{4e-3}}{2}, +\infty)$
- f decrescente per $x \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{4e-3}}{2}) \cup (-1/2, 0) \cup (0, \frac{-1+\sqrt{4e-3}}{2})$

Da cui segue che i punti $\frac{-1-\sqrt{4e-3}}{2}$ e $\frac{-1+\sqrt{4e-3}}{2}$ sono dei minimi relativi, mentre $-1/2$ è un massimo relativo. Il grafico della funzione è

In conclusione il grafico della funzione



□

2) Studiare, al variare di $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+3x^2+x)^{1/3}-(x+1)}{\left(\frac{1}{x}-(\ln(1+x)-\ln(x))\right)^{\alpha}}$$

Svolgimento. Per capire di che forma indeterminata si tratta approssimiamo le funzione che sono presenti a numeratore e denominatore. Per il numeratore dobbiamo approssimare la radice mettendo evidenza il temine dominante:

$$\begin{aligned}(x^3+3x^2+x)^{1/3} &= x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3} = x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= x\left(1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+1+o(1)\end{aligned}$$

Con qeusta approssimazione il numeratore diventa

$$N(x) = o(1)$$

ossia sappiamo solo che é un infinitesimo ma non sappiamo l'ordine. Aumntiamo, quindi, l'approssimazione della radice:

$$\begin{aligned}(x^3+3x^2+x)^{1/3} &= x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2+o\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\right)\\ &= x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= x+1-\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Quindi il numeratore sarà un'infinitesimo di ordine 1

$$N(x) = -\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Procediamo in maniera analoga per il denominatore approssimando il logaritmo

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-(\ln(1+x)-\ln(x)) &= \frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Quindi per $x\to+\infty$ si ha

$$\frac{(x^3+3x^2+x)^{1/3}-(x+1)}{\left(\frac{1}{x}-(\ln(1+x)-\ln(x))\right)^{\alpha}} = \frac{\frac{-2}{3x}(1+o(1))}{\frac{2^{\alpha}}{x^{2\alpha}}(1+o(1))} = -\frac{x^{2\alpha-1}}{3\cdot 2^{\alpha-1}}(1+o(1))$$

Da cui segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+3x^2+x)^{1/3}-(x+1)}{\left(\frac{1}{x}-(\ln(1+x)-\ln(x))\right)^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^{2\alpha-1}}{3\cdot 2^{\alpha-1}}(1+o(1)) = \begin{cases} -\infty & ,\ \alpha > 1/2\ ;\\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & ,\ \alpha = 1/2\ ;\\ 0^- & ,\ 0<\alpha<1/2\ .\end{cases}$$

$\square$

3) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$$

determinare la serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$ della funzione f e studiarne la convergenza.

Svolgimento. Decomponendo la funzione in fratti semplici possimo ricondurre il calcolo della serie di Taylor a quella della somma di due serie geometriche:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x/2+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(-\sum_{k=0}^{\infty} x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^k\right) \\ &= \frac{-1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\right) x^k \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza della serie è

$$(|a_k|)^{1/k} = \left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\right)^{1/k} = \exp\left(\frac{1}{k}\ln\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}(1+o(1))\right) \stackrel{k\to\infty}{\to} 1$$

quindi il raggio di convergenza è $r = 1$ e la serie converge assolutamente nell'intervallo $(-1, 1)$ mentre non converge nell'insieme $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Per quanto riguarda i punti di frontiera $-1, 1$, si ha

$$(-1)^k\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\right) \stackrel{k\to\infty}{\to} \nexists \quad , \quad \left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\right) \stackrel{k\to\infty}{\to} 1$$

quindi sia per $x = -1$ che per $x = 1$ *non è verificata la condizione necessaria* per la convergenza della serie, quindi per tali valori la serie non converge. In conclusione la serie di Taylor di $f(x)$ centrata in $x_0 = 0$ è

$$f(x) = \frac{-1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\right) x^k \ , \qquad x \in (-1, 1)\ .$$

□

4) Studiare al variare del parametro $\alpha \in (0,+\infty)$ l'integrabilitá in senso improprio, nell'intervallo $(0,+\infty)$, della funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)(4x+3x^2)}{\big(x^2(2+x)\big)^2}$$

Calcolarne per $\alpha = 1$ l'integrale nell'intervallo $(1,+\infty)$, ossia $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)(4x+3x^2)}{\left(x^2(2+x)\right)^2}\,dx$.

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio: l'intervallo di integrazione non è limitato e il denominatore si annulla in $x = 0$. Negli intervalli $[a,b]$ per ogni $0 < a < b < +\infty$ la funzione è continua e limitata quindi integrabile. Inoltre dato che la funzione è definitivamente di segno costante sia in 0 che ha $+\infty$ possiamo applicare il confronto asintotico per lo studio dell'integrabilità in senso improprio.

Per $\boxed{x = +\infty}$ si ha

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)(4x+3x^2)}{\big(x^2(2+x)\big)^2} = \frac{3\alpha\ln(x)x^2(1+o(1))}{x^6(1+o(1))} = \frac{3\alpha\ln(x)}{x^4}(1+o(1))$$

da cui segue che f_α è integrabile a $+\infty$ per ogni $\alpha > 0$.

Per $\boxed{x = 0}$ si ha

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)(4x+3x^2)}{\big(x^2(2+x)\big)^2} = \frac{4x^{\alpha+1}(1+o(1))}{4x^4(1+o(1))} = \frac{1}{x^{3-\alpha}}(1+o(1))$$

che risulta integrabile in 0 se, e solo se, $3-\alpha < 1 \iff \alpha > 2$. In conclusione la funzione è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 2$.

Per il calcolo dell'integrale nell'intervallo $(1,+\infty)$ per $\alpha = 1$, calcoliamo una promitiva della funzione integranda. Integrando per parti si ha

$$\int \frac{\ln(1+x)(4x+3x^2)}{\big(x^2(2+x)\big)^2}\,dx = -\frac{\ln(1+x)}{x^2(2+x)} + \int \frac{1}{x^2(2+x)(1+x)}$$

Decomponimo in fratti semplici

$$\frac{1}{x^2(2+x)(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{2+x} + \frac{D}{1+x}$$

si hanno le seguenti condizioni

$$D = 1\ ,\ C = -1/4\ ,\ B = 1/2\ ,\ 0 = A + C + D \iff A = -3/4$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^2(2+x)(1+x)} = -3/4\ln|x| - \frac{1}{2x} - 1/4\ln|2+x| + \ln|1+x|$$

e una primitiva della funzione nell'intervallo $(1,+\infty)$ è

$$F(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x^2(2+x)} - \frac{1}{2x} + \ln\left(\frac{1+x}{(x)^{3/4}(2+x)^{1/4}}\right)$$

In conclusione

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)(4x+3x^2)}{\big(x^2(2+x)\big)^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(1) = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{2}{(3)^{1/4}}\right)$$

dove si é osservato che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ e che la funzione integranda é integrabile secondo Riemann in $x = 1$ in quanto continua in $x = 1$, quindi $\lim_{x\to 1^-} F(x) = F(1)$.

$\square$

5) *Data l'equazione differenziale*

$$\ddot{x} + 4x = \cos(2t) \ ,$$

trovarne la soluzione generale e risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del secondo ordine. La soluzione omogenea è

$$x_{om}t = A\sin(2t) + B\cos(2t)$$

come si deduce dalle radici del polinmio caratteristico associato all'omogenea $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$. Troviamo una doluzione particolare dell'equazione generale per similitudine. Dal termine noto $f(t) = \cos(2t)$ si deduce che ci troviamo in nella situazione di risonanza in quanto $2i$ è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea. Quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y(t) = t\,(D\sin(2t) + E\cos(2t))$$

imponendo che $y(t)$ soddisfi l'eqazione generale: $\ddot{y}+4y = \cos(2t)$. Per semplificare i conti conviene scrivere $y(t) = t\,z(t)$ con $z(t) = D\sin(2t) + E\cos(2t)$ in quanto $z(t)$ soddisfa l'omogenea. Infatti

$$\cos(2t) = \ddot{y}+4y = 2\dot{z}(t)+t\ddot{z}(t)+4tz(t) = 2\dot{z}(t)+t\big(\ddot{z}(t)+4z(t)\big) = 2\dot{z}(t) = 4D\cos(2t)-4E\sin(2t)$$

da cui segue che $4D = 1$ ed $E = 0$. Quindi la soluzione particolare e la soluzione generale sono

$$y(t) = \frac{t}{4}\sin(2t) \quad , \quad x_{Gen}(t) = x_{om}(t) + y(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t)$$

e

$$x_{Gen}(t) = x_{om}(t) + y(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t)$$

Infine imponiamo la condizione di Cauchy sulla soluzione generale

$$x(0) = 0 = B \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 = 2A \ ,$$

ossia

$$x_{Cauchy}(t) = \frac{t}{4}\sin(2t)$$

□