Esonero di Geometria 1 del 23 settembre 2018

Nome: Cognome: Corso di Laurea in Matematica

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Sia $\phi : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ la funzione definita da $\phi\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) := (a - b + c)x^3 + (b + 3d)x^2 + d + a$.
Sia $\psi : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ la funzione definita da $\phi\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) := (ad)x^3 + (dc)x^2 + cbx + ba$.
Discutere la linearità di ϕ e ψ.

ϕ è lineare. Infatti

1) $\forall\, p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ si ha $\phi(p(x) + q(x)) = \phi(p(x)) + \phi(q(x))$

perché se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$

si ha $\phi(p(x)) = (a - b + c)x^3 + (b + 3d)x^2 + d + a$

$\phi(q(x)) = (a' - b' + c')x^3 + (b' + 3d')x^2 + d' + a'$

e $\phi(p(x) + q(x)) = \phi((a + a')x^3 + (b + b')x^2 + (c + c')x + d + d') =$

distributività e commutatività di +

$(a + a' - (b + b') + c + c')x^3 + (b + b' + 3(d + d'))x^2 + d + d' + a + a' =$

$(a - b + c)x^3 + (b + 3d)x^2 + d + a + (a' - b' + c')x^3 + (b' + 3d')x^2 + d' + a' =$

$\phi(p(x)) + \phi(q(x))$

2) $\forall\, p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\phi(\alpha p(x)) = \alpha\, \phi(p(x))$

perché se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

si ha $\phi(p(x)) = (a - b + c)x^3 + (b + 3d)x^2 + d + a$

~~$\alpha(a - b + c)x^3 + \alpha(b + 3d)x^2 + d$~~

e $\phi(\alpha(p(x))) =$ $\phi(\alpha a x^3 + \alpha b x^2 + \alpha c x + \alpha d) = (\alpha a - \alpha b + \alpha c)x^3 + (\alpha b + \alpha 3d)x^2 + \alpha d + \alpha a = \dots$

$\dots = \alpha((a - b + c)x^3 + (b + 3d)x^2 + d + a) = \alpha\, \phi(p(x))$

distributività

ψ non è lineare. Infatti $\psi(x^3 + x^2) = 1$ e

$\psi(2(x^3 + x^2)) = \psi(2x^3 + 2x^2) = 4 \neq 2 = 2\psi(x^3 + x^2)$

Esonero di Geometria 1 del 23 settembre 2018

Nome: Cognome: Corso di Laurea in Matematica

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Sia $\phi : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ la funzione definita da $\phi\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) := (a - b + c)x^3 + (b + 3d)x^2 + d + a$.
Sia $\psi : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ la funzione definita da $\phi\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) := (ad)x^3 + (dc)x^2 + cbx + ba$.
Discutere la linearità di ϕ e ψ.

Soluzione alternativa per linearità di ϕ.

Sia $B = \{\underset{\vec{v}_1}{x^3}, \underset{\vec{v}_2}{x^2}, \underset{\vec{v}_3}{x}, \underset{\vec{v}_4}{1}\}$ base di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Abbiamo

$$\left(C_B^{-1} \circ L_A \circ C_B\right)(ax^3+bx^2+cx+d) =$$

$$\left(C_B^{-1} \circ L_A\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = C_B^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = C_B^{-1}\begin{pmatrix} a-b+c \\ b+3d \\ 0 \\ a+d \end{pmatrix} =$$

$$(a-b+c)x^3 + (b+3d)x^2 + d+a = \phi(ax^3+bx^2+cx+d)$$

Quindi $\phi = C_B^{-1} \circ L_A \circ C_B$ ed è lineare perché composizione di applicazioni lineari.

2. Sia $A_1 := \left\{ M \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix} M \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, stabilire se A_1 è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
Sia $A_2 := \left\{ N \in M_{1,2}(\mathbb{R}) : N \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} N^t = 0 \right\}$ stabilire se A_2 è un sottospazio vettoriale di $M_{1,2}(\mathbb{R})$.[1]
Se A_i è un sottospazio vettoriale esibirne una base.

A_1 è sottospazio vettoriale di $M_{22}(\mathbb{R})$.
Infatti,

0) $\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, quindi $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \in A_1$

1) Se $M \in A_1$ e $N \in A_1$ anche $M+N \in A_1$ perché

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}(M+N)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \left(\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}M + \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}N\right)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}N\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \dots$$

distributività ~~e [illegible]~~ prod matrice

$$\dots \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

perché $M, N \in A_1$

2) Se $M \in A_1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ anche $\alpha M \in A_1$ perché

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\alpha M\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \alpha \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

proprietà prod matrice — perché $M \in A_1$

A_2 non è sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
Infatti $A_2 = \left\{ N \in M_{1,2}(\mathbb{R}) : N\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}N^T = 0 \right\} = \left\{ (a,b) \text{ t.c. } a,b \in \mathbb{R} \text{ e } -a^2+b^2=0 \right\}$

Perciò $(1,1) \in A$ e $(-1,1) \in A_2$ ma $(1\ 1) + (-1\ 1) = (0\ 2) \notin A_2$

$\boxed{-0+4 \neq 0}$

Una base di A_1 è data da $\left\{ \begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix} \right\}$.

Siccome $\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 2a+4c & 2b+4d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2c+b+2d & b+2d\\ 2a+4c+2b+4d & 2b+4d\end{pmatrix}$

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{array}{l} a+2c+b+2d=0\\ 2a+4c+2b+4d=0\\ b+2d=0\\ 2b+4d=0\end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{array}{l} b+2d=0\\ a+2c=0\end{array} \right\} = \left\{ t_1\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix} \text{ con } t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

[1] $(a\ b)^t = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Nome: Cognome:

3.

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ e sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A. Scrivere la matrice rappresentativa di L_A rispetto alle basi $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel codominio. Esibire basi del nucleo e dell'immagine di L_A.

La matrice rappresentativa M di L_A rispetto a B_1 e B_2 è

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -8 \\ 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. ~~Infatti~~ Determiniamo le colonne M^1, M^2 e M^3 di M.

M^1 contiene le coordinate di $L_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 e, siccome $L_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha $M^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

M^2 contiene le coordinate di $L_A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 e, siccome $L_A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha $M^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

M^3 contiene le coordinate di $L_A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 e, siccome $L_A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $M^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Una base dell'immagine di L_A è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Il nucleo di L_A è il sottospazio vettoriale nullo.

Per definizione l'insieme vuoto è base dello spazio vettoriale nullo.

Per verificare che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è base di $L_A(\mathbb{R}^3)$ basta mostrare che $L_A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ cioè che L_A è suriettiva, cioè che $Rg(A) = 3$.

Usando E.G. otteniamo $Rg(A) = Rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3$.

Siccome $\dim(\text{Nucleo di } L_A) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\text{Im } L_A) = 3 - 3 = 0$

Il nucleo di L_A è il sottospazio vettoriale nullo.

4.

Sia $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Esiste una matrice $N_1 \in M_{5,3}(\mathbb{R})$ tale che $N_1 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Esiste una matrice $N_2 \in M_{5,3}(\mathbb{R})$ tale che $MN_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Esiste una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$?

Non esiste $N_1 \in M_{5,3}(\mathbb{R})$ t.c. $N_1 M = id_{5,5}$. Se esistesse, avremmo $L_{N_1} \circ L_M = L_{id_{5,5}} = id_{\mathbb{R}^5}$ e quindi, siccome $id_{\mathbb{R}^5}$ è iniettiva, avremmo che $L_M : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva. Questo è assurdo perché la dimensione del dominio di L_M è strettamente maggiore di quella del codominio.

Esiste $N_2 \in M_{5,3}(\mathbb{R})$ tale che $MN_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Siccome $rg\, M = 3$ $\longleftarrow$ operando con E.G. si ha

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$L_M : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ è suriettiva.

~~Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$~~

Quindi esistono $v_1 v_2 v_3 \in \mathbb{R}^5$ t.c. $L_M(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $L_M(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $L_M(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ l'unica applicazione lineare t.c. $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$, $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$, $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3$

e sia $N_2 \in M_{5,3}(\mathbb{R})$ t.c. $L_{N_2} = \varphi$.

Allora $MN_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ perché

$L_{M \cdot N_2} = L_M \circ L_{N_2} = L_M \circ \varphi \overset{*}{=} id_{\mathbb{R}^3} = L_{id_{3,3}}$

e quindi $MN_2 = id_{3,3}$ (perché se $L_A = L_B$ allora $A = B$)

L'uguaglianza è vera perché

$L_M \circ \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L_M(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$L_M \circ \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = L_M(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e $L_M \circ \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L_M(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e, siccome esiste un'unica applicazione lineare con fissati valori su una base, si ha $L_M \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^3}$