

Diario del corso di Geometria 1

January 29, 2020

Prima lezione (30-9-2019).

Presentazione del corso. Richiami sullo spazio vettoriale dei vettori applicati in un punto. Richiami sugli insiemi, sui prodotti cartesiani e sulle funzioni. Definizione di Campo. Alcune proprietà deducibili dalla definizione. Esempi: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$.

Seconda lezione (1-10-2019). Esempi di campo : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$. Definizione di spazio vettoriale. Esempi: $\mathbb{K}^n, M_{m,n}(\mathbb{K}), Funz(X, \mathbb{K}), \mathbb{K}[x]$.

Terza lezione (2-10-2019). Esempi di spazi vettoriali: $\mathbb{K}^n, M_{m,n}(\mathbb{K}), \mathbb{K}[x], Funz(X, V), Funz(X, \mathbb{K})$.

Quarta lezione (3-10-2019). Sottospazi vettoriali definizioni e sue varianti. Esempi geometrici e $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$. I sottospazi vettoriali ereditano struttura di spazio vettoriale. Combinazioni lineari. Sottospazio generato. Sottospazio intersezione.

Quinta lezione (7-10-2019). Unione di sottospazi vettoriali. Sottospazio somma di due sottospazi vettoriali. Matrici simmetriche e anti simmetriche. Prodotti di matrici. Espressione dell'elemento di posto i, j , della i -esima colonna e della j -esima riga di un prodotto di matrici.

Sesta lezione (8-10-2019). Proprietà del prodotto di matrici. Sistemi lineari, matrici a scala.

Settima lezione (10-10-2019). Lemma fondamentale per la soluzione dei sistemi lineari. Riduzione di un sistema lineare ad un sistema equivalente con matrice associata a scala. Algoritmo di eliminazione di Gauss.

Ottava lezione (14-10-2019). Esempio di risoluzione sistem lineare. Teorema di struttura delle soluzioni di un sistem lineare. Sottospazi affini.

Nona lezione (15-10-2019). Spazi affini. La struttura di spazio affine su uno spazio vettoriale. Esempi di sottospazi affini. Sottospazio affine generato da un insieme finito di punti. Intersezione di sottospazi affini.

Decima lezione (16-10-2019). Esercizi.

Undicesima lezione (17-10-2019). Giacitura di sottospazi affini, sottospazio generato da due sottospazi affini. Lineare dipendenza e lineare indipendenza di sistemi di vettori.

Dodicesima lezione (21-10-2019). Lineare dipendenza o indipendenza di sistemi ottenuti aggiungendo un vettore a du un sistema indipendente. Basi di spazi vettoriali: definizioni equivalenti. Lemma di Steinitz.

Tredicesima lezione (22-10-2019). Sottospazi vettoriali di spazi vettoriali finitamente generati sono finitamente generati. Basi standard degli esempi fondamentali di spazi vettoriali. Algoritmo di estrazione della base. Algoritmo di estensione ad una base.

Esercitazione (23-10-2019) (Prof. Lipparini).

Quattordicesima lezione (24-10-2019). Basi in spazi vettoriali di dimensione fissata. Formula di Grassmann. Dimensione di spazi affini. Equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di sottospazi affini di \mathbb{K}^n .

Quindicesima lezione (28-10-2019). Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane. Somma diretta di due sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann affine. Applicazioni lineari. Esempi: l'applicazione lineare associata ad una matrice, l'applicazione delle coordinate rispetto ad una base.

Sedicesima lezione (29-10-2019). Le applicazioni lineari sono determinate dai loro valori su una base del dominio. Ogni applicazione lineare da \mathbb{K}^n a \mathbb{K}^m è l'applicazione lineare associata ad una matrice. I sottospazi vettoriali nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Immagini di sistemi di vettori dipendenti sono dipendenti. Generatori dell'immagine di un'applicazione lineare. Relazione tra dimensioni di nucleo, immagine e dominio di un'applicazione lineare.

Esercitazione (30-10-2019) (Prof. Lipparini).

Diciassettesima lezione (31-01-2019). Funzioni invertibili. Isomorfismi tra spazi vettoriali Spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Composizione di funzioni. Prodotto di matrici e composizione tra applicazioni lineari.

Dicottesima lezione (4-11-2019). Associatività del prodotto di matrici. Matrice invertibili e applicazioni lineari invertibili. Rango di una matrice e rango di un'applicazione lineare.

Diciannovesima lezione (5-11-2019). Uguaglianza tra rango per righe e rango per colonne: caso delle matrici a scala e caso generale. Uso dell'eliminazione di Gauss per trovare base dello spazio vettoriale generato dalle colonne di una matrice.

Esercitazione (6-11-2019) (Prof. Lipparini).

Ventesima lezione (07-11-2019). Matrice rappresentativa di un'applicazione lineare: Definizione, proprietà fondamentale, colonne della matrice. Studio di un'applicazione lineare tramite matrice rappresentativa. Basi del nucleo e dell'immagine.

Ventunesima lezione (10-11-2019). Esempio di calcolo di matrice rappresentativa e di calcolo di basi di nucleo ed immagine tramite matrice rappresentativa. $Hom(V, W)$ è un sottospazio vettoriale di $Funz(V, W)$.

Ventiduesima lezione (11-11-2019). La matrice rappresentativa consente di definire un isomorfismo tra $Hom(V, W)$ e $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Lo spazio vettoriale duale. Caso finitamente generato: Isomorfismo tra V e V^\vee tramite scelta di una base di V , Forme bilineari da $V \times W$ in \mathbb{K} . Le forme bilineari da $V \times W$ in \mathbb{K} inducono applicazioni lineari da V in W^\vee .

Esercitazione (13-11-2019) (Prof. Lipparini).

Ventitreesima lezione (13-11-2019). Isomorfismo tra V e $V^{\vee\vee}$ senza scelta di una base. Introduzione al determinante: area con segno di un parallelogramma nel piano \mathbb{R}^2 . Forme multilineari alternanti.

Ventiquattresima lezione (18-11-2019). Le forme multilineari alternanti sono nulle su una n -upla di vettori dipendenti. Fissata una base di uno spazio vettoriale finitamente generato esiste un'unica forma bilineare alternante con valore assegnato su quella base.

Venticinquesima lezione (19-11-2019). Definizione di Determinante. Formula con le permutazioni. Determinante della trasposta. Proprietà del determinante. Determinante ed operazioni elementari per riga.

Esercitazione (20-11-2019) (Prof. Lipparini).

Ventiseiesima lezione (21-11-2019). Sviluppo di Laplace del determinante per righe e per colonne.

Pausa esonero.

Ventisettesima lezione (2-12-2019). Il rango di una matrice è il massimo ordine di una sottomatrice quadrata con determinante non nullo. Formula per l'inversa. Formula di Cramer. Lo spazio delle n forme multilineari alternanti su uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 dello spazio vettoriale delle funzioni da V^n in \mathbb{K} .

Ventottesima lezione (3-12-2019). Formula di Binet. Dimostrazione che usa l'applicazione lineare indotta sugli spazi delle forme multilineari alternanti. Matrice di trasformazione delle coordinate (dalle coordinate rispetto ad una base alle coordinate rispetto ad un'altra base).

Esercitazione (4-12-2019) (Prof. Lipparini).

Ventovesima lezione (5-12-2019). Dipendenza della matrice rappresentativa dalle basi scelte. Il gruppo $GL(n, \mathbb{K})$. Ogni elemento di $GL(n, \mathbb{K})$ è una matrice di cambio coordinate. Motivazione geometrica della formula di Binet. Endomorfismi di spazi vettoriali.

Trentesima lezione (9-12-2019). Autovettori e autovalori. Endomorfismi diagonalizzabili. Coniugio tra matrici. Matrici diagonalizzabili. La matrice rappresentativa di un endomorfismo diagonalizzabile è diagonalizzabile. Determinante di un endomorfismo. Ricerca degli autovalori.

Trentunesima lezione (10-12-2019). Funzione polinomiale caratteristica. Autospazi. Basi di autospazi. Esempio di calcolo. molteplicità geometrica. Autovettori relativi ad autovalori distinti sono indipendenti.

Esercitazione (11-12-2019) (Prof. Lipparini).

Trentaduesima lezione (12-12-2019). Caratterizzazione della diagonalizzabilità. Polinomio caratteristico di un endomorfismo e di una matrice quadrata. Molteplicità algebrica. Confronto tra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica.

Trentatreesima lezione (16-12-2019). Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato). Diagonalizzazione nel caso complesso. Diagonalizzazione nel caso reale. Coefficienti del polinomio caratteristico: traccia e determinante.

Trentaquattresima lezione (17-12-2019). Spazi vettoriali euclidei. Prodotto scalare. Prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n . Norma di un vettore. ortogonalità tra vettori. Vettori ortogonali non nulli sono indipendenti. Sottospazio ortogonale. Dimensione del sottospazio ortogonale ad un sottospazio assegnato. Proiezione ortogonale. Basi ortonormali.

Esercitazione (18-12-2019) (Prof. Lipparini).

Esercitazione (19-12-2019) (Prof. Lipparini).

Trentacinquesima lezione (7-1-2020). Basi ortonormali e coordinate. Matrici ortogonali. Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Esempi.

Trentaseiesima lezione (9-1-2020). Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Prodotto vettoriale.

Trentasettesima lezione (13-1-2020). Norma del prodotto vettoriale. Spazi euclidei. Distanza negli spazi euclidei. Esempi: punto-retta, punto-piano.

Trentanovesima lezione (14-1-2020). Variante complessa degli spazi vettoriali euclidei: gli spazi hermitiani. Prodotto hermitiano. Basi ortonormali negli spazi vettoriali hermitiani: esistenza e proprietà.

Quarantesima lezione (15-1-2020). Esercizi di geometria dello spazio. Distanza piano-piano, distanza retta-retta. Due sottospazi di uno spazio vettoriale

euclideo coincidono se e solo se coincidono le loro giaciture.

Quarantunesima lezione (16-1-2020). La diagonalizzazione negli spazi vettoriali euclidei. Diagonalizzabilità con base ortonormale. Endomorfismi simmetrici. Matrici rappresentative (rispetto a base ortonormale) di endomorfismi simmetrici. Proprietà fondamentali degli endomorfismi simmetrici ("l'ortogonale di un sottospazio stabile è stabile" e "le radici del polinomio caratteristico sono reali"). Teorema spettrale: un endomorfismo di uno spazio vettoriale euclideo ammette una base ortonormale di autovettori se e solo se l'endomorfismo è simmetrico.

Quarantaduesima lezione (20-01-2020). Interpretazione matriciale del teorema spettrale. Teorema spettrale per endomorfismi simmetrici hermitiani di spazi vettoriali hermitiani.

Quarantatreesima lezione (21-01-2020). ortogonale dell' ortogonale di un sottospazio vettoriale. Esercizi di geometria euclidea dello spazio.

Quarantaquattresima lezione (22-01-2020). Esecizi sulla diagonalizzazione e sul teorema spettrale.

Quarantacinquesima lezione (23-01-2020). Panoramica sul corso.