Esercizi 9

1) Sia $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Stabilire se L_A è diagonalizzabile.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nei casi in cui è diagonalizzabile, trovare una matrice B tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale.

2) Sia $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{C})$. Stabilire se L_A è diagonalizzabile.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Esiste $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ invertibile tale che $A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$?

4) Esiste $A \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $A \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$?

5) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Sia $\phi : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che $\phi(v_1) = v_1$, $\phi(v_2) = v_1 + 2v_2$ e $\phi(v_3) = v_1 + v_2 - v_3$. Dimostrare che ϕ è diagonalizzabile ed esibire una base di autovettori (espressi come combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3).

6) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita ponendo $\phi(M) = AM$ per ogni $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Esibire una base di autovettori per ϕ.

7) Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

a)Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che $\phi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\phi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b)Discutere la diagonalizzabilità di ϕ. Se ϕ è diagonalizzabile, esibire una base di V costituita da autovettori per ϕ.

8) Sia $V \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ il sottospazio vettoriale costituito dai polinomi che si annullano in 1. Sia $\phi : V \to V$ la funzione definita da $\phi(p(x)) = \frac{d(p(x)(x-1))}{dx}$ per ogni $p(x) \in V$.

a) Mostrare che ϕ è lineare.

b) Discutere la diagonalizzabilità di ϕ. Se ϕ è diagonalizzabile, esibire una base di V costituita da autovettori per ϕ.

9) Sia $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e sia $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Discutere la diagonalizzabilità[1] di A_1 e A_2 . Se A_i è diagonalizzabile, trovare una base di autovettori per A_i.

10) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{27}.

Esercizi più avanzati:

11) Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associata alla matrice A è diagonalizzabile.

[1] come matrici a coeffcienti reali

12) Dimostrare che esiste una matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ invertibile e tale che $A \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice non nulla tale che $A^k = 0$ per qualche intero positivo k. Mostrare che A non è diagonalizzabile.