Esercizi 7

1) Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare il determinante di A.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrare che A è invertibile e calcolare $\det(A^{-5}B^4)$.

3) Per quali $t \in \mathbf{R}$ le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

4) Determinare in funzione di $t \in \mathbf{R}$ la dimensione del sottospazio vettoriale generato da $tx^2 + x + 2$, $x^2 + 2x$ $tx^2 + 3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

5) Calcolare al variare di $t \in \mathbb{R}$ il rango della matrice $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4-t & 1 \\ t & 1 & 1+t & 2+t \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e sia S ottenuta da A con una delle 3 operazioni elementari per riga. Calcolare il determinante di S in funzione di quello di A e dell'operazione usata.

7) Dimostrare che, se n è pari, esiste una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = -id_n$.[1]

Dimostrare che, se n è dispari, non esiste nessuna matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = -id_n$.

8) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to R^2$ la rotazione in senso antiorario di un angolo pari α. Mostrare che ϕ è lineare e trovare la matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $\phi = L_A$.

[1] $id_n \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è la matrice con 1 sulla diagonale e 0 altrove

Esercizi più teorici:

i) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $B := \{v_1, ..v_n\}$ una base di V e per ogni $i = 1, .., n$ sia $v_i^\vee : V \to \mathbb{K}$ l'unica applicazione lineare tale che $v_i^\vee(v_i) = 1$ $v_i^\vee(v_j) = 0$ se $i \neq j$.

Mostrare che $B^\vee := \{v_1^\vee, ..v_n^\vee\}$ è una base di $V^\vee = Hom(V, \mathbb{K})$.

ii) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $B := \{v_1, ..v_n\}$ una base di V. Sia $\psi : V \to \mathbb{K}$ un'applicazione lineare. Determinare le coordinate di ψ rispetto alla base (duale di B) $B^\vee := \{v_1^\vee, ..v_n^\vee\}$ di $V^\vee = Hom(V, \mathbb{K})$.

iii) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ la funzione che associa ad ogni $\psi \in Hom(W, \mathbb{K})$ l'applicazione lineare $f^\vee(\psi) := \psi \circ f : V \to \mathbb{K}$. Dimostrare che $f^\vee$ è lineare.

iv) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, sia $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare associata ad A e $L_A^\vee : \mathbb{K}^{m\vee} \to \mathbb{K}^{n\vee}$ l'applicazione lineare discussa nell'esercizio iii). Quale relazione c'è tra A e la matrice rappresentativa di $L_A^\vee$ rispetto alle basi duali delle basi standard di $\mathbb{K}^m$ e $\mathbb{K}^n$?