Esercizi 7

1) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\{v_1, v_2.., v_n\}$ una base di V. Per ogni intero positivo $i \leq n$ sia $L_i : V \to \mathbb{K}$ l'applicazione lineare tale che $L_i(v_j) = 0$ se $i \neq j$ e $L_i(v_i) = 1$. Dimostrare che $\{L_1, L_2.., L_n\}$ è una base di $V^\vee$.

2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ siano $\phi_1 : V \to \mathbb{K}$ e $phi_2 : V \to \mathbb{K}$ applicazioni lineari tali che $Ker(\phi_1) = Ker(\phi_2)$. Dimostrare che esiste $a \in \mathbb{K}$ tale che $a\phi_1 = \phi_2$.

3) Sia V è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ e sia $f : V^n \to \mathbb{K}$ è un' applicazione multilineare tale che $f(v_1, .., v_i, .., v_j, .., v_n) = 0$ se $v_i = v_j$ con $i \neq j$. Mostrare che f è alternante.

4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mathbb{R}$ la funzione definita da $f\left(\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right) := (ad - bc)$. Mostrare che f è una forma multilineare alternante.

5) Sia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mathbb{R}$ la funzione definita da $f\left(\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right) := (c + d)(ad - bc)$. Mostrare che f non è una forma multilineare alternante.

6) Siano V e W spazi vettoriali di dimensioni rispettivamente m e n e sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di rango r. Dimostrare che esistono una base B_V di V e una base B_W di W tali che la matrice rappresentativa di ϕ rispetto alle basi B_V e B_W abbia le entrate di tipo (i, i) con $i \leq r$ pari a 1 e le altre entrate tutte nulle.

7) Sia $V =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} > \subset \mathbb{R}^3$.

Sia $\phi : V \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := (x + z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - 2z)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice rappresentativa di ϕ rispetto alla base

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

usata come base sia del dominio che del codominio.

8) Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \ \phi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \ \phi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

a) Calcolare la matrice rappresentativa di ϕ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ usata sia come base del dominio che del codominio.

b) Calcolare la matrice rappresentativa di ϕ alla base

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ usata sia come base del dominio che del codominio.

c) Calcolare la matrice rappresentativa di ϕ rispetto alla base

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

del dominio e alla base standard di $\mathbb{R}^3$ usata come base del codominio.