Esercizi 6

1) Sia $F : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da
$F(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Mostrare che F è lineare.
b) Scrivere la matrice rappresentativa di F rispetto alle basi standard di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
c) Trovare dimensioni e basi per immagine e nucleo di F.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Scrivere la matrice rappresentativa di $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$

3) Mostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolarne l'inversa.

4) Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ finitamente generati. Sia B_v una base di V e sia B_W una base di W. Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che il rango $rg(\phi)$ dell'applicazione lineare ϕ (cioè la dimensione dell'imaginie di ϕ) è pari al rango $rg(M(\phi)_{B_V}^{B_W})$ della matrice rappresentativa di ϕ rispetto alle basi B_V e B_W.

5) Mostrare che, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,l}(\mathbb{K})$, si ha $rg(A) \geq rg(AB)$ e $rg(B) \geq rg(AB)$.

6) I) Mostrare che, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ha rango k, esiste $B \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ tale che AB ha rango k.
II)Mostrare che, se $D \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ ha rango k, esiste $C \in M_{k,m}(\mathbb{K})$ tale che $CD = I_k$. (I_k è la matrice con entrate pari a 1 sulla diagonale e pari a 0 fuori dalla diagonale).
III) Mostrare che, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ha rango k, esistono $B \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ e $C \in M_{k,m}(\mathbb{K})$ tali che $CAB = I_k$.

7) Per ogni matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sia M^T la matrice trasposta di M. Mostrare che se $A \in M_{l,s}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{s,t}(\mathbb{K})$ si ha $(AB)^T = B^T A^T$.

8) Usando gli esercizi 5 6 e 7 mostrare che, per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, si ha $rg(A) = rg(A^T)$ (cioè la dimensione del sottospazio generato dalle righe di una matrice è pari alla dimensione del sottospazio generato dalle coleonne della stessa matrice).
Suggerimento: osservare che basta dimostrare che $rg(A) \leq rg(A^T)$ per

ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.