Esercizi 5

1)Quali delle seguenti funzioni sono applicazioni lineari?

$f_1 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f_1(P(x)) := 2P(5) + P'(2)$

$f_2 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f_2(P(x)) := \begin{pmatrix} 2P(5) + P'(2) \\ P"(3) + p(0) \end{pmatrix}$

$f_3 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f_3(P(x)) := \begin{pmatrix} 2P(5) + P'(2) \\ P"(3) + p(0) + 3 \end{pmatrix}$

$f_4 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_4(P(x)) := P(x)(3x^2 + 1)$.

$f_5 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_5(P(x)) := (P(x) + 1)(3x^2 + 1)$.

$f_6 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_6(P(x)) := (P(x))^2$.

$f_7 : \mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}_2[x]$ definita ponendo $f_7(P(x)) := (P(x))^2$.

$f_8 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f_8(P(x)) := P(1)P'(0)$.

$g_1 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \to M_{2,2}(\mathbb{K})$ definita ponendo $g_1(A) := A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$g_2 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \to M_{2,2}(\mathbb{K})$ definita ponendo $g_2(A) := 2A + 3A^t + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$g_3 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \to M_{2,2}(\mathbb{K})$ definita ponendo $g_3(A) := 3A + 2A^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$g_4 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \to M_{2,2}(\mathbb{K})$ definita ponendo $g_4(A) := AA^t$.

2) Dimostrare che le seguenti funzioni sono applicazioni lineari:

$h_1 : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ definita da $h_1(P(x)) := P(a)$ dove a è un fissato elemento di $\mathbb{K}$.

$h_2 : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ definita da $h_2(P(x)) := \frac{d^k}{dx^k}P(x)$ (la derivata k-esima del polinomio).

$h_3 : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ definita da $h_3(P(x)) := P(x)Q(x)$ dove Q è un fissato polinomio di $\mathbb{K}[x]$.

$h_4 : M_{m,n}(\mathbb{K}) \to M_{m,l}(\mathbb{K})$ definita ponendo $h_4(A) := AB$ dove B è una fissata matrice di $M_{m,l}(\mathbb{K})$.

$h_5 : M_{m,n}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K})$ definita ponendo $h_5(A) := A^t$.

3) Usare l'esercizio 2) per rigiustificare le risposte affermative dell'esercizio 1).

4) Quante sono le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che

$F \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $F \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$?

Quante sono le le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che

$F\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $F\begin{pmatrix}7\\8\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}$?

5) Sia $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\2&3&0\\2&2&2\\1&0&3\end{pmatrix}$. Trovare dimensioni e basi del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A:\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}^5$ associata ad A.

6) Sia $F: M_{2,2}(\mathbb{R})\to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da
$F(A)=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}A-A\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$.
a) Mostrare che F è lineare.

7) Sia $\{v_1,v_2,v_3\}$ una base di un spazio vettoriale V. Dimostrare che $\{v_1+v_2+v_3, v_1+2v_2, v_2+2v_3\}$ è una base per V.

8) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $X\subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto di V e sia $p\in X$ fissato. Dimostrare che X è un sottospazio affine di V se e solo se $X-p:=\{x-p\ :\ x\in X\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

9) Sia $f:V\to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, sia $w\in W$ e sia

$$f^{-1}(w):=\{v\in V:\ f(v)=w\}\,.$$

Mostrare che $f^{-1}(w)\subset V$ è vuoto o è un sottospazio affine di V (dotato della sua naturale struttura di spazio affine).

10) Sia $f:V\to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, sia $S\subseteq W$ un sottospazio affine e sia

$$f^{-1}(S):=\{v\in V:\ f(v)\in S\}\,.$$

Mostrare che $f^{-1}(S)\subseteq V$ è vuoto o è un sottospazio affine di V.