Esercizi 3

1) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $p_1, p_2, \cdots p_n$ elementi di V. Sia $\overline{p_1, p_2, \cdots p_n}$ il sottospazio affine generato da $p_1, p_2, \cdots p_n$. Mostrare che

$$\overline{p_1, p_2, \cdots p_n} = \{t_1 p_1 + t_2 p_2 + \cdots + t_n p_n \ : t_i \in \mathbb{K} \ \forall i \ e \ t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1\}$$

2) Quali, fra i seguenti, sono sottospazi affini di $\mathbb{K}[x]$ (dotato della struttura natuarale di spazio affine associato ad uno spazio vettoriale)? Perché?[1].
$U := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1) = 1\}$.
$V := \{p \in \mathbb{K}[X] : p'(0) = 1\}$[2].
$Z := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1) = 1, p'(0) = 0\}$,
$W := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1)p'(0) = 0\}$.

Suggerimento per l'ultimo punto: usare che se V è uno spazio vettoriale e V_1 e V_2 sono sottospazi vettoriali di V tali che $V_1 \not\subseteq V_2$ e $V_2 \not\subseteq V_1$ allora l'unione $V_1 \cup V_2$ non è un sottospazio vettoriale di V.

3) Mostrare che la circonferenza unitaria

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ \mathbb{R}^2 \ ; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

non è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^2$.

4) Quali, fra i seguenti sottoinsiemi di $M_{2,2}(\mathbb{K})$, sono sottospazi affini di $M_{2,2}(\mathbb{K})$ (dotato della struttura natuarale di spazio affine associato ad uno spazio vettoriale)? Perché?

$W := \{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : AA = 0\}$,
$Z := \left\{ A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : A + A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5) Siano $v_1, v_2, \cdots v_n$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$. Mostrare che $v \in < v_1, v_2, \cdots, v_n >$ se e solo se $v_1, v_2, \cdots v_n, v$ sono linearmente dipendenti.

6) Mostrare che lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$ su $\mathbb{K}$ non è finitamente generato (cioè non è il sottospazio vetttoriale generato da un insieme finito di polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$).

---

[1] Fornire una dimostrazione (in caso di risposta affermativa)o un controesempio (in caso di risposta negativa).

[2] p' è il polinomio che si ottiene derivando p. Esplicitamente se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ allora $p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.

7) Mostrare che il $\mathbb{K}$ spazio vettoriale $Funz(\mathbb{N},\mathbb{K})$[3] delle funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{K}$ non è finitamente generato.

8) Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere [4]:

a) i vettori $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

a') i $< \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} >= M_{2,2}(\mathbb{R})$.

b) i vettori $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

b') i vettori $< \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} >= M_{2,2}(\mathbb{R})$.

9) Sia

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

e sia

$$V = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} > \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Trovare un sottoinsieme $B \subset A$ tale che:
i) B è un insieme di vettori linearmente indipendenti,
ii) B il sottospeazio vettorile generato da B coincide con V.

10) Sia $S \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala non nulla . Dimostrare che le colonne di S che contengono i pivot costituiscono una base del sottospazio vettoriale contenuto in $\mathbb{K}^m$ generato da tutte le colonne di S.

11) Sia $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice non nulla e $S \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala ottenuta da M facendo solo operazioni elementari per riga (ad esempio S è ottenuta da M mediante eliminazione di Gauss).

Siano $S^{i_1}, S^{i_2}, \cdots S^{i_k}$ le colonne di S contenenti i pivot.

---

[3] Cioè lo spazio delle successioni a valori in $\mathbb{K}$

[4] In questo esercizio tutti gli spazi vettoriali considerati sono su $\mathbb{R}$.

Dimostrare che
a) $M^{i_1}, M^{i_2}, \cdots, M^{i_k}$ sono linearmente indipendenti,
b) $< M^{i_1}, M^{i_2}, \cdots, M^{i_k} >=< M^1, M^2, \cdots, M^n > \subseteq \mathbb{K}^m$.

(Equivalentemente:
a) le colonne di M che diventano colonne con pivot dopo una riduzione a scala mediante operazioni elementari per riga sono linearmente indipendenti,
b) il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di M che diventano colonne con pivot dopo una riduzione a scala mediante operazioni elementari per riga coincide con il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato da tutte le colonne di M.)

Suggerimento Sia M' una matrice ottenuta da M eliminando alcune colonne e sia S' la matrice ottenuta da S eliminando le stesse colonne.

Osservare che le operazioni elementari per riga che trasformano M in S trasformano la matrice M' in S'. Quindi l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $M'X = 0$ coincide con l'linsieme delle soluzioni di $S'X = 0$.

Dedurne che le colonne di M' sono indipendenti se e solo se lo sono quelle di S'.

Concludere per il punto osservando che
i)una matrice S' ottenuta da una matrice a scala S eliminando solo colonne che non contengono pivot rimane a scala,
ii)le colonne di una matrice a scala sono indipendenti se e solo se ognuna di esse contiene un pivot.
Usare l'esercizio 5) per concludere per il punto b).

12) Svolgere gli esercizi 8) e 9) usando l'esercizio 11).