Esercizi 2

1) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, sia $U := \{X \in \mathbb{K}^n : AX = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$ e sia inoltre $V := \{AX \ : \ X \in \mathbb{K}^n\} \subseteq \mathbb{K}^m$.
Dimostrare, usando le proprietà del prodotto di matrici, che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ e V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$.

2) Quali, fra i seguenti sottoinsiemi di $M_{2,2}(\mathbb{K})$, sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{K})$? Perché?
$U := \{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A\}$
$W := \{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : AA = 0\}$
$Z := \{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : AX = XA \ \ \forall X \in M_{2,2}(\mathbb{K})\}$
Mostrare che $U \neq M_{2,2}(\mathbb{K})$ e descrivere tutte le matrici di Z.

3) Sia $E_j \in \mathbb{K}^n$ il vettore colonna con entrate tutte nulle eccetto la j-esima che vale 1. Sia $F_i \in M_{1,m}(\mathbb{K})$ il vettore riga con entrate tutte nulle eccetto la i-sima che vale 1. Sia $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a coefficienti in $\mathbb{K}$.
a) Descrivere il risultato del prodotto $B \cdot E_j$ in termini delle colonne di B.
b) Descrivere il risultato del prodotto $F_i \cdot B$ in termini delle righe di B.
c) Dimostrare la proprietà associativa del prodotto di matrici (usando la proprietà distributiva del prodotto).

4) Risolvere i seguenti sistemi lineari a coefficienti reali nelle variabili x_1, x_2 x_3 e x_4.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} , \tag{1}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} , \tag{2}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} , \tag{3}$$

5)Sia S un sistema lineare e M matrice completa associata ad S. Supponiamo che M sia a scala. Come deve essere M affinché M sia compatibile?

6) Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere [1]:

$$i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} >,$$

$$ii) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} >,$$

$$iii)\ x^3 + x^2 + x + 7 \in < x^3 + 10x^2 + x + 5, x^2 + 2x + 5, 10x + 3, 3 >,$$

$$iv)\ x^3 + x^2 + x + 7 \in < x^3 + 10x^2 + x + 5, 2x^3 + 2x^2, x^3 + 10x, x^3 >,$$

$$v)\ < x^3 + 10x^2 + x + 5, 2x^3 + 2x^2, x^3 + 10x, x^3 >= \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

$$vi) < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= \mathbb{R}^3$$

7) Quante soluzioni ammette il seguente sistema lineare di due equazioni in tre variabili a coefficienti nel campo $\mathbb{F}_2$ con 2 elementi?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} . \tag{4}$$

Quali sono le possibili cardinalità dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{F}_2$.

8) Dimostrare che un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite con $m < n$ ammette sempre una soluzione non nulla (diversa dal vettore nullo di $\mathbb{K}^n$).

[1] In questo esercizio tutti gli spazi vettoriali considerati sono su $\mathbb{R}$.