Esercizi 1

1) Sia $\mathbb{K}$ un campo.
Mostrare che per ogni $a \in \mathbb{K}$ si ha $(-1) \cdot a = -a$.
Mostrare che, se $a \in \mathbb{K}$ ed esiste $b \in \mathbb{K}$ tale che $a + b = b$, si ha $a = 0$.
Mostrare che, se $a \in \mathbb{K}$ ed esiste un elemento non nullo $b \in \mathbb{K}$ tale che $a \cdot b = b$, si ha $b = 1$.

2) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Mostrare che per ogni $v \in V$ si ha $0 \cdot_V v = 0_v$.
Mostrare che per ogni $v \in V$ si ha $(-1) \cdot_V v = -v$.
Mostrare che, se $v \in V$ ed esiste $w \in V$ tale che $v +_V w = w$, si ha $v = 0$.
Mostrare che, se $a \in \mathbb{K}$, si ha $a \cdot_V 0_V = 0_V$.
Mostrare che, se $a \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ è un vettore non nullo tale che $a \cdot_V v = 0_V$, si ha $a = 0$.

3) Quali, fra i seguenti, sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}[x]$? Perché?[1].
$U := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1) = 0\}$.
$V := \{p \in \mathbb{K}[X] : p'(2) = 0\}$.
$Z := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1) = 0, p'(2) = 0\}$[2] .
$W := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1)p'(2) = 0\}$.

4) Mostrare che se V è uno spazio vettoriale e U e W sono sottospazi vettoriali di V tali che $U \not\subseteq W$ e $W \not\subseteq U$ allora l'unione $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale di V. Usare questo esercizio per rispondere all'ultima domanda dell'esercizio 2).

5) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $\Psi : K[x] \to Funz(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ la funzione che associa al polinomio p la funzione che manda ogni elemento $a \in \mathbb{K}$ nel valore $p(a) \in \mathbb{K}$, che si ottiene calcolando p in a. Mostrare che, se $\mathbb{K}$ è infinito, la funzione Ψ è iniettiva[3].

Suggerimento: Usare la regola di Ruffini: se $p \in \mathbb{K}[x]$, $a \in \mathbb{K}$ e $p(a) = 0$, allora esiste un polinomio $q \in \mathbb{K}[x]$ tale che $p = (x - a)q$

Mostrare che, se $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ (il campo con 2 elementi), Ψ non è iniettiva.

6) Mostrare che il sottospazio $Span \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è tutto $\mathbb{R}^3$.

---

[1] Fornire una dimostrazione (in caso di risposta affermativa)o un controesempio (in caso di risposta negativa).

[2] p' è il polinomio che si ottiene derivando p. Esplicitamente se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ allora $p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.

[3] Cioè che se $p \neq q$ allora $\Psi(p) \neq \Psi(q)$.