Esercizi 9

1) Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Trovare gli autovalori di L_A e ,per ognuno di essi, determinare molteplicità algebrica e geometrica, discutere la diagonalizzabilità di di L_A nei seguenti casi.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Suggerimento: cercare un autovalore tra i numeri interi di modulo piccolo.

Nei casi in cui è diagonalizzabile, trovare una matrice B tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale.

2) Sia $L_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C}).$$

Stabilire se L_A è diagonalizzabile. Se L_A è diagonalizzabile, trovare una base di autovettori e una matrice invertibile $B \in M_{3,3}(\mathbb{C})$ tale che BAB^{-1} sia diagonale.

3) Siano $p_1 := (1,1,1)$, $p_2 := (4,5,2)$ $p_3 := (-1,0,7)$ punti dello spazio euclideo di dimensione 3. Nello stesso spazio euclideo sia s la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -21 \\ 3x_2 - x_3 = 31 \end{cases}$.

a) Trovare equazioni cartesiane per la retta r che passa per p_2 e p_3.

b) Trovare equazioni cartesiane per il piano H passante per p_1 e perpendicolare[1] alla retta r.

c) Determinare l'intersezione tra r e H.

d) Calcolare la distanza[2] tra il punto p_1 e la retta r.

e) Trovare equazioni cartesiane del piano K contenente r e avente giacitura parallela al perpendicolare ad r ed s [3]. Determinare il punto $K \cap s$.

f) Trovare equazioni cartesiane del piano L contenente s e avente giacitura parallela al perpendicolare ad r ed s. Determinare il punto $L \cap r$.

g) Determinare la distanza tra le rette r e s.

h) Trovare eqauzioni cartesiane della retta t passante per p_1 e perpendicolare a K.

k) Trovare la distanza tra p_1 e K.

4) Usare il determinante e il prodotto vettoriale per risolvere a),d),g) e h) dell'esercizio precedente.

5) Sia $(V, <,>)$ uno spazio vettoriale euclideo. Sia $W \subset V$ siano $w_1, w_2, ..w_n$ generatori di W. Dimostrare che

$$W^{\perp} = \{v \in V : < v, w_i >= 0 \; \forall i = 1, ..n\}.$$

[1] Cioè con giacitura ortogonale alla giaciture della retta r

[2] La distanza tra due sottoinsiemi X e Y dello spazio euclideo è l'estremo inferiore delle distanze tra coppie di punti, di cui il primo in X e il secondo in Y. La distanza di un punto p da una retta r è pari alla distanza di p dall'intersezione di r con il piano orotgonale ad r passante per p. La distanza di r da un altra retta s è pari alla norma di un vettore ortogonale ad r ed s con primo estremo in r e secondo in S. La distanza di un punto p da un piano H è pari alla distanza di p dall'intersezione di H con la retta per p perpendicolare ad H.

[3] Cioè K contiene r e la giacitura di K contiene un vettore non nullo perpendicolare sia alla giacitura di r che a quella di s.

6) Sia $(V, <, >)$ uno spazio vettoriale euclideo e siano $v_1, v_2, .., v_k$ elementi di V. Dimostrare che la funzione $\phi : V \to \mathbb{R}^k$ definita ponendo

$$\phi(v) := \begin{pmatrix} < v, v_1 > \\ < v, v_2 > \\ . \\ . \\ < v, v_k > \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare.

Esercizi sui polinomi:

a)[4] Siano $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tali che $p(x)q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Dimostrare che $q(x) \in \mathbb{R}[x]$.

b)[5] Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia $x_0 \in \mathbb{K}$ e sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Mostrare che $p(x_0) = 0$ se e soltanto se esiste un polinomio $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tale che $p(x) = (x - x_0)q(x)$ in $\mathbb{K}[x]$.

Suggerimento: osservare che, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ..a_1 x + a_0$, si ha $p(x) - p(x_0) = a_n(x^n - x_0^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_0^{n-1}) + ..a_1(x - x_0)$ e usare che $x - x_0$ divide $x^i - x_0^i$ per ogni naturale positivo $i > 0$.

c) Sia $\mathbb{K}$ un campo tale che, per ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado maggiore o uguale a 1, esiste almeno un $x_0 \in \mathbb{K}$ tale che $p(x_0) = 0$. Dato $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ dimostrare che esistono $x_1, x_2, .., x_l$ in $\mathbb{K}$ e numeri naturali strettamente positivi $m_1, m_2, .., m_k$ tali che

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2}..(x - x_l)^{m_l}.$$

d) Dimostrare che se $x_1, x_2, .., x_l$ sono l elementi del campo $\mathbb{K}$ e se $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ è tale che

$$p(x) = (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2}..(x - x_l)^{m_l},$$

allora $x_1, x_2, .., x_l$ sono tutte le soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$ e $(x - x_i)^{m_i}$ è la massima potenza di $x - x_i$ che divide $p(x)$ in $\mathbb{K}[x]$.

[4] Lo stesso argomento funziona se sostituiamo $\mathbb{C}$ con un qualsiasi campo $\mathbb{K}$ e sostituiamo $\mathbb{R}$ con un sottocampo di $\mathbb{K}$.
[5] Regola di Ruffini.