**Esercizi 7**

1) Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare il determinante di $A$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrare che $A$ è invertibile e calcolare $\det(A^{-5}B^4)$.

3) Per quali $t \in \mathbf{R}$ le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

4) Determinare in funzione di $t \in \mathbf{R}$ la dimensione del sottospazio vettoriale generato da $tx^2 + x + 2$ , $x^2 + 2x$ $tx^2 + 3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

5) Sia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$f\left(\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)\right) := (c+d)(ad - bc).$$

a) Mostrare che $f$ è lineare nel primo vettore[1] e che per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ si ha $f(v, v) = 0$.

b) Mostrare che $f$ non è multilineare.

6) Calcolare al variare di $t \in \mathbb{R}$ il rango della matrice $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4-t & 1 \\ t & 1 & 1+t & 2+t \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e sia $S$ ottenuta da $A$ con una delle 3 operazioni elementari per riga. Calcolare il determinante di $S$ in funzione di quello di $A$ e dell'operazione usata.

8) Dimostrare che, se $n$ è pari, esiste una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = -id_n$ .[2]

Dimostrare che, se $n$ è dispari, non esiste nessuna matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = -id_n$.

[1] Cioè che per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $f((av_1 + bv_2, v) = af(v_1, v) + bf(v_2, v)$

[2] $id_n \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è la matrice con 1 sulla diagonale e 0 altrove

Esercizi più teorici [3]:

$i)$ Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $B := \{v_1, ..v_n\}$ una base di $V$. Sia $\psi : V \to \mathbb{K}$ un'applicazione lineare. Determinare le coordinate di $\psi$ rispetto alla base (duale di B) $B^* := \{v_1^*, ..v_n^*\}$ di $V^\vee = Hom(V, \mathbb{K})$.

$ii)$ Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ la funzione che associa ad ogni $\psi \in Hom(W, \mathbb{K})$ l'applicazione lineare $f^\vee(\psi) := \psi \circ f : V \to \mathbb{K}$. Dimostrare che $f^\vee$ è lineare.

$iii)$ Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, sia $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare associata ad $A$ e $L_A^\vee : \mathbb{K}^{m\vee} \to \mathbb{K}^{n\vee}$ l'applicazione lineare discussa nell'esercizio ii). Quale relazione c'è tra $A$ e la matrice rappresentativa di $L_A^\vee$ rispetto alle basi duali delle basi standard di $\mathbb{K}^m$ e $\mathbb{K}^n$?

I seguenti esercizi forniscono una dimostrazione alternativa della formula di Binet.

$a)$ Sia $V$ uno spazio vettoriale su di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$ e sia $\Lambda^n V^\vee$ il sottoinsieme dello spazio vettoriale $Funz(V^n, \mathbb{K})$ costituito dalle forme multilineari alternanti. Dimostrare che $\Lambda^n V^\vee$ è un sottospazio vettoriale di $Funz(V^n, \mathbb{K})$.

$b)$ Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $\phi : W^n \to \mathbb{K}$ una forma multilineare alternante su $W$. Si definisca una funzione $f^*(\phi) : V^n \to \mathbb{K}$ ponendo, per ogni n-upla di ulementi $v_1, .., v_n$ di $V$,

$$f^*(\phi)(v_1, .., v_n) := \phi(f(v_1), .., f(v_n)).$$

Si dimostri che $f^*(\phi)$ è una forma multilineare alternante su $V$.

$c)$ Nel caso in $V = \mathbb{K}^n$ si mostri che la dimensione di $\Lambda^n V^\vee$ è 1.

$d)$ Usando l'esercizio $b)$ si calcoli la dimensione di $\Lambda^n V^\vee$ per ogni spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$.

$e)$ Si dimostri che per ogni applicazione applicazione lineare $f : V \to W$ la funzione $f^* : \Lambda^n W^\vee \to \Lambda^n V^\vee$ è lineare.

$f)$ Si dimostri che se $Z$ è un altro spazio vettoriale di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$ e se $g : Z \to V$ è un'applicazione lineare allora per ogni $\phi \in \Lambda^n W^\vee$ si

[3] Assumiamo $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

ha $g^*(f^*(\phi)) = (g \circ f)^*(\phi)$. Cioè le funzioni $g^* \circ f^* : \Lambda^n W^\vee \to \Lambda^n Z^\vee$ e $(f \circ g)^* : \Lambda^n W^\vee \to \Lambda^n Z^\vee$ sono uguali.

*g*) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e sia $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'applicazione lineare associata ad $A$. Si dimostri che $L_A^* : \Lambda^n \mathbb{K}^{n\vee} \to \Lambda^n \mathbb{K}^{n\vee}$ è la moltiplicazione per il determinante di $A$.

Suggerimento: si usi il determinante come base di $\Lambda^n \mathbb{K}^{n\vee}$.

*h*) Usando gli esercizi f) e g) si dimostri la formula di Binet. Si dimostri cioè che, se $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, si ha $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.