

Esercizi 6

1) Quali delle seguenti funzioni sono applicazioni lineari?

$f_1 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f_1(P(x)) := 2P(5) + P'(2)$

$f_2 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f_2(P(x)) := \begin{pmatrix} 2P(5) + P'(2) \\ P''(3) + p(0) \end{pmatrix}$

$f_3 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f_3(P(x)) := \begin{pmatrix} 2P(5) + P'(2) \\ P''(3) + p(0) + 3 \end{pmatrix}$

$f_4 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_4(P(x)) := P(x)(3x^2 + 1)$.

$f_5 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_5(P(x)) := (P(x) + 1)(3x^2 + 1)$.

$f_6 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_6(P(x)) := (P(x))^2$.

$f_7 : \mathbb{F}_2[x] \rightarrow \mathbb{F}_2[x]$ definita ponendo $f_7(P(x)) := (P(x))^2$.

$f_8 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f_8(P(x)) := P(1)P'(0)$.

$g_1 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{K})$ definita ponendo $g_1(A) := A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$g_2 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{K})$ definita ponendo $g_2(A) := 2A + 3A^t + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$g_3 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{K})$ definita ponendo $g_3(A) := 3A + 2A^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$g_4 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{K})$ definita ponendo $g_4(A) := AA^t$.

2) Dimostrare che le seguenti funzioni sono applicazioni lineari:

$h_1 : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$ definita da $h_1(P(x)) := P(a)$ dove a è un fissato elemento di \mathbb{K} .

$h_2 : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$ definita da $h_2(P(x)) := \frac{d^k}{dx^k} P(x)$ (la derivata k -esima del polinomio).

$h_3 : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$ definita da $h_3(P(x)) := P(x)Q(x)$ dove Q è un fissato polinomio di $\mathbb{K}[x]$.

$h_4 : M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{m,l}(\mathbb{K})$ definita ponendo $h_4(A) := AB$ dove B è una fissata matrice di $M_{n,l}(\mathbb{K})$.

$h_5 : M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{K})$ definita ponendo $h_5(A) := A^t$.

3) Usare l'esercizio 2) per rigiustificare le risposte affermative dell'esercizio 1).

4) Quante sono le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tali che $F \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $F \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$?

Quante sono le le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tali che

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } F \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}?$$

$$5) \text{ Sia } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Trovare dimensioni e basi del nucleo e dell'immagine}$$

dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^5$ associata ad A .

6) Sia $F : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da

$$F(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrare che F è lineare.

b) Scrivere la matrice rappresentativa di F rispetto alle basi standard di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

c) Trovare dimensioni e basi per immagine e nucleo di F .

7) Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di un spazio vettoriale V . Dimostrare che $\{v_1 + v_2 + v_3, v_1 + 2v_2, v_2 + 2v_3\}$ è una base per V .

8) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Scrivere la matrice rappresentativa di $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow$

\mathbb{R}^2 rispetto alle basi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di \mathbb{R}^3 e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di \mathbb{R}^2

9) Mostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolarne l'inversa.

10) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $X \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto di V e sia $p \in X$ fissato. Dimostrare che X è un sottospazio affine di V se e solo se $X - p := \{x - p : x \in X\}$ è un sottospazio vettoriale di V .