Esercizi 3

1) Siano $v_1, v_2, \cdots v_n$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$. Mostrare che $v \in < v_1, v_2, \cdots v_n >$ se e solo se $v_1, v_2, \cdots v_n, v$ sono linearmente dipendenti.

2) Mostrare che, se V è uno spazio vettoriale $W \subsetneq V$ è un sottospazio vettoriale propriamente contenuto in V, la dimensione di W è strettamente minore di quella di V.

3) Mostrare che lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$ su $\mathbb{K}$ non è finitamente generato.

4) Mostrare che il $\mathbb{K}$ spazio vettoriale $Funz(\mathbb{N}, \mathbb{K})$[1] delle funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{K}$ non è finitamente generato.

5) Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere [2]:

a) i vettori $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ costituiscono una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$,

b) i vettori $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ costituiscono una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

6) Sia

$$V = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} > \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Estrarre una base dai generatori di V assegnati e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.

7) Sia $V = < x^3 + x^2 + x + 2, x^3 + 2x^2 + 3x + 1, 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3, 2x + 1, 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 > \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Estrarre una base dai generatori di V assegnati e completarla ad una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

8) Sia

$$V = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} > \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Estrarre una base dai generatori di V assegnati e completarla ad una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

9) Quali sono i valori che si possono ottenere come dimensioni[3] delle

[1] Cioè lo spazio delle successioni a valori in $\mathbb{K}$

[2] In questo esercizio tutti gli spazi vettoriali considerati sono su $\mathbb{R}$.

[3] La dimensione di uno spazio affine è per definizione la dimensione della sua giacitura.

intersezioni tra due sottospazi affini di dimensione 4 di $\mathbb{R}^6$.

10) Siano $U :=< \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} >$ e
$V := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} >$ sottospazi vettoriali di $\subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$.
Calcolare la dimensione del sottospazio $U \cap V \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$.

11) Sia S una matrice a scala non nulla . Dimostrare le colonne di S che contengono i pivot costituiscono una base del sottospazio vettoriale generato da tutte le colonne di S.

12) Sia M una matrice non nulla e S una matrice a scala ottenuta da M facendo solo operazioni elementari per riga (ad esempio S è ottenuta da M mediante eliminazione di Gauss).

Siano $S^{i_1}, S^{i_2}, \cdots S^{i_k}$ le colonne di S contenenti i pivot.

Dimostrare che $M^{i_1}, M^{i_2}, \cdots, M^{i_k}$ sono una base per il sottospazio vettoriale $< M^1, M^2, \cdots, M^n > \subseteq K^m$ generato dalle colonne di M.

(Equivalentemente: una base del sottospazio vettoriale generato dalle colonne di una matrice M è data dalle colonne della matrice che diventano colonne con pivot dopo una riduzione a scala di M mediante operazioni elementari per riga.)

Suggerimento Sia M' una matrice ottenuta da M eliminando alcune colonne e sia S' la matrice ottenuta da S eliminando le stesse colonne.

Osservare che le operazioni elementari per riga che trasformano M in S trasformano la matrice M' in S'. Quindi l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $M'X = 0$ coincide con l'linsieme delle soluzioni di $S'X = 0$.

Dedurne che le colonne di M' sono indipendenti se e solo se lo sono quelle di S'.

Concludere osservando che
i)una matrice S' ottenuta da una matrice a scala S eliminando solo colonne che non contengono pivot rimane a scala,
ii)le colonne di una matrice a scala sono indipendenti se e solo se ognuna di esse contiene un pivot.

13) Svolgere gli esercizi 6), 7) e 8) usando l'esercizio 12).