Esercizi 2

1) Risolvere i seguenti sistemi lineari a coefficienti reali nelle variabili x_1, x_2 x_3 e x_4.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} , \tag{1}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} , \tag{2}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} , \tag{3}$$

2)Sia S un sistema lineare e M matrice completa associata ad S. Supponiamo che M sia a scala. Come deve essere M affinché M sia compatibile?

3) Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere [1]:

$$i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} >,$$

$$ii) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} >,$$

$$iii) \; x^3 + x^2 + x + 7 \in < x^3 + 10x^2 + x + 5, x^2 + 2x + 5, 10x + 3, 3 >,$$

$$iv) \; x^3 + x^2 + x + 7 \in < x^3 + 10x^2 + x + 5, 2x^3 + 2x^2, x^3 + 10x, x^3 >,$$

$$v) \; < x^3 + 10x^2 + x + 5, 2x^3 + 2x^2, x^3 + 10x, x^3 >= \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

$$vi) < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= \mathbb{R}^3$$

[1] In questo esercizio tutti gli spazi vettoriali considerati sono su $\mathbb{R}$.

4) Quante soluzioni ammette il seguente sistema lineare a coefficienti nel campo $\mathbb{F}_2$ con 2 elementi?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} . \tag{4}$$

Quali sono le possibili cardinalità dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{F}_2$.

5) Sia V uno spazio vettoriale e siano $p + W$ e $q + U$ sottospazi affini di V (dotato della struttura natuarale di spazio affine associato ad uno spazio vettoriale). Mostare che l'intersezione (insiemistica) $(p + W) \cap (q + U)$ è un sottospazio affine se non è vuota.

6) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $p_1, p_2, \cdots p_n$ elementi di V. Sia $\overline{p_1, p_2, \cdots p_n}$ il sottospazio affine generato da $p_1, p_2, \cdots p_n$. Mostrare che

$$\overline{p_1, p_2, \cdots p_n} = \{t_1 p_1 + t_2 p_2 + \cdots + t_n p_n \ : t_i \in \mathbb{K} \ \forall i \ e \ t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1\}$$

7) Quali, fra i seguenti, sono sottospazi affini di $\mathbb{K}[x]$ (dotato della struttura natuarale di spazio affine associato ad uno spazio vettoriale)? Perché?[2].
$U := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1) = 1\}$.
$V := \{p \in \mathbb{K}[X] : p'(0) = 1\}$[3].
$Z := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1) = 1, p'(0) = 0\}$,
$W := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1)p'(0) = 0\}$.

Suggerimento per l'ultimo punto: usare che se V è uno spazio vettoriale e V_1 e V_2 sono sottospazi vettoriali di V tali che $V_1 \not\subseteq V_2$ e $V_2 \not\subseteq V_1$ allora l'unione $V_1 \cup V_2$ non è un sottospazio vettoriale di V.

8) Mostrare che la circonferenza unitaria

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ \mathbb{R}^2 \ ; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

non è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^2$.

9) Quali, fra i seguenti sottoinsiemi di $M_{2,2}(\mathbb{K})$, sono sottospazi affini di $M_{2,2}(\mathbb{K})$ (dotato della struttura natuarale di spazio affine associato ad uno

[2]Fornire una dimostrazione (in caso di risposta affermativa)o un controesempio (in caso di risposta negativa).

[3]p' è il polinomio che si ottiene derivando p. Esplicitamente se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ allora $p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.

spazio vettoriale)? Perché?

$$
\begin{aligned}
W &:= \{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : AA = 0\},\\
Z &:= \left\{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : A + A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

10) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia A uno spazio affine con giacitura V. Sia $\Psi_A : A \times A \to V$ la funzione che definisce la struttura di spazio affine su A.

Sia $\Phi_A : A \times V \to A$ la funzione definita associando a $(p, v) \in A \times V$ l'unico punto $q \in A$ tale che $\Psi_A(p, q) = v$ (tale q esiste per la proprietà 1) della definizione di spazio affine).

Mostrare che [4]

a) $(\Phi_A(\Phi_A(p, v_1), v_2) = \Phi_A(p, v_1 + v_2)$ per ogni $p \in A$ e per ogni $v_1, v_2 \in V$,

b) per ogni $p, q \in A$ esiste unico $v \in V$ tale che $\Phi_A(p, v) = q$.

Sia ora V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia A un insieme non vuoto e sia $\Phi_A : A \times V \to A$ una funzione che soddisfi a) e b).

Sia $\Psi_A : A \times A \to V$ la funzione definita associando ad ogni $(p, q) \in A \times A$ lunico vettore $v \in V$ tale che $\Phi_A(p, v) = q$ (tale v esiste per b)).

Dimostrare che la funzione $\Psi_A : A \times A \to V$ definisce sull'insieme A una struttura di spazio affine con giacitura V.

[4] Nel linguaggio dell'algebra a) afferma che Φ_A definisce un'azione (destra) del gruppo abeliano V su A e b) che tale azione è libera e transitiva.