Esercizi 10

1) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice A. Esiste una una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard, di autovettori per L_A? In caso di risposta affermativa esibire una tale base. Esibire una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice A. Esiste una una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard, di autovettori per L_A? In caso di risposta affermativa esibire una tale base. Esibire una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.

3) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3+t & 0 & 2+t \end{pmatrix} \in\in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $L_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice A_t ammette una base di autovettori? Per quali $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $L_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice A_t ammette una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard, di autovettori ?

4) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3+t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $L_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice A_t ammette una base di autovettori? Esibire una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard, di autovettori per l'applicazione lineare L_{A_t} per ogni $t \in \mathbb{R}$ per cui una tale base esiste.

5) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ sia $F_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita ponendo $F_A(X,Y) := X^T AY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$. Determinare una base B di $\mathbb{R}^3$ (diagonalizzante per F_A) tale che la matrice rappresentativa di F_A rispetto a B sia in forma di Sylvester[1]. Trovare una matrice invertibile $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $M^T AM$ sia in forma di Sylvester.

6) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ sia $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & t \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ sia $F_{A_t} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita ponendo $F_A(X,Y) := X^T AY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$. Determinare per ogni $t \in \mathbb{R}$ la forma di Sylvester di F_{A_t}.

7) Siano A e B due matrici simmetriche in $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Mostrare che se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono coniugate e congruenti [2]. Esibire due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono coniugate. Esibire due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono congruenti.

8) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$. Trovare una matrice invertibile $M \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ tale che MAM^{-1} sia diagonale.

9) Sia $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 6x_2y_2$. Dimostrare che F è un prodotto scalare.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ ed $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Esiste una base di autovettori per L_A che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare F?

10) Dire quali coppie di matrici nella seguente lista sono coniugate o congruenti in $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

[1] Cioè diagonale con solo coefficienti uguali 1, -1 e 0 sulla diagonale nell'ordine dato qui.

[2] A e B si docono coniugate se esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM = B$, si dicono congruenti se esiste una matrice invertibile M tale che $M^T AM = B$

$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

11) Sia V uno spazio vettoriale reale. Mostrare che per ogni base B di V esiste un prodotto scalare su V rispetto a cui la base B è ortonormale.

12) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile. Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale tale che $\phi(W) \subset W$. Sia $\phi_{|W} : W \to W$ l'endomorfismo di W indotto da ϕ per restrizione[3]. Dimostrare che $\phi_{|W}$ è un endomorfismo diagonalizzabile.

Suggerimento: usare esercizio 10).

[3] Cioè definito da $\phi_{|W}(v) := \phi(v)$