Esercizi 1

1) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, sia $U := \{X \in \mathbb{K}^n : AX = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$ e sia inoltre $V := \{AX \ : \ X \in \mathbb{K}^n\} \subseteq \mathbb{K}^m$.
Dimostrare, usando le proprietà del prodotto di matrici, che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ e V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$.

2) Quali, fra i seguenti, sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}[x]$? Perché?[1].
$U := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1) = 0\}$.
$V := \{p \in \mathbb{K}[X] : p'(2) = 0\}$.
$Z := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1) = 0, p'(2) = 0\}$[2] .
$W := \{p \in \mathbb{K}[X] : p(1)p'(2) = 0\}$.

3) Mostrare che se V è uno spazio vettoriale e U e W sono sottospazi vettoriali di V tali che $U \not\subseteq W$ e $W \not\subseteq U$ allora l'unione $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale di V. Usare questo esercizio per rispondere all'ultima domanda dell'esercizio 2).

4) Quali, fra i seguenti sottoinsiemi di $M_{2,2}(\mathbb{K})$, sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{K})$? Perché?
$U := \{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A\}$
$W := \{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : AA = 0\}$
$Z := \{A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) : AX = XA \ \ \forall X \in M_{2,2}(\mathbb{K})\}$
Mostrare che $U \neq M_{2,2}(\mathbb{K})$ e descrivere tutte le matrici di Z.

5) Sia X un insieme non vuoto, sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V uno spazio vettoriale su K. Dotare l'insieme $Funz(X, V)$ delle funzioni da X a V di una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.[3]

6) Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, siano $C, D \in M_{n,l}(\mathbb{K})$ e sia $a \in \mathbb{K}$. Dimostrare che $(A+B)C = AC+BC$, $A(C+D) = AC+AD$ e $(aA)C = a(AC) = A(aC)$

7) Sia $e_j \in \mathbb{K}^n$ il vettore colonna con entrate tutte nulle eccetto la j-esima che vale 1. Osservare che se $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ allora $Be_j = B^j$ (la j-esima colonna di B). Sia ora $A \in M_{l,m}(\mathbb{K})$ e sia $C \in \mathbb{K}^n$. Dimostrare che

$$(AB)C = A(BC). \tag{1}$$

[1] Fornire una dimostrazione (in caso di risposta affermativa)o un controesempio (in caso di risposta negativa).

[2] p' è il polinomio che si ottiene derivando p. Esplicitamente se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ allora $p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.

[3] Cioè definire le operazioni di somma e prodotto per uno scalare e verificare le 8 proprietà della definizione di spazio vettoriale.

Concludere che vale l'associatività del prodotto di matrici.

Suggerimento: osservare che $C = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$ e dimostrare che, usando l'esercizio 6), la formula (1) diventa
$c_1((AB)e_1) + c_2((AB)e_2) + \cdots + c_n((AB)e_n) =$
$c_1(A(Be_1)) + c_2(A(Be_2)) + \cdots + c_n(A(Be_n))$. Concludere la dimostrazione della formula (1) spiegando che $(AB)e_i = A(Be_i)\ \forall i$.

8) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $\Psi : K[x] \to Funz(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ la funzione che associa al polinomio p la funzione che manda ogni elemneto $a \in \mathbb{K}$ nel valore $p(a) \in \mathbb{K}$, che si ottiene calcolando p in a. Mostrare che, se $\mathbb{K}$ è infinito, Ψ è iniettiva[4].

Suggerimento: Usare la regola di Ruffini: se $p \in \mathbb{K}[x]$, $a \in \mathbb{K}$ e $p(a) = 0$, allora esiste un polinomio $q \in \mathbb{K}[x]$ tale che $p = (x - a)q$

Mostrare che, se $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ (il campo con 2 elementi), Ψ non è iniettiva.

[4]Cioè che se $p \neq q$ allora $\Psi(p) \neq \Psi(q)$.