

## Esonero Analisi Reale 13.11.2018

Non é consentito l'uso di libri o fotocopie, ad eccezione del materiale scritto a mano con le formule. Non é consentito l'uso di strumenti di comunicazione.

Durante l'esame NON é consentito lasciare l'aula o fare domande.

Un esercizio, senza la giustificazione dei passaggi eseguiti, NON sarà preso in considerazione.

Le risposte non motivate, senza calcoli o incomprensibili non saranno prese in considerazione.

Consegnare solo questi fogli.

- 
1. ( 10 pt) Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme misurabile. Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni integrabile che converge in  $L^1(E)$  verso una funzione integrabile  $f \in L^1(E)$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| = 0.$$

Si dimostri che esiste una sottosuccessione della successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , che converge puntualmente, quasi ovunque sull'insieme  $E$ , verso la funzione  $f$ .

**2.** ( 10 pt) Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme misurabile e limitato. Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione misurabile ed essenzialmente limitata, i.e.:

$$\|f\|_{\infty, \text{ess}} = \inf\{M \mid |f(x)| \leq M \text{ quasi ovunque per tutti } x\} < \infty.$$

Si verifichi che

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\infty, \text{ess}}.$$

**3.** ( 10 pt) **A.** Si dimostri che esiste un sottoinsieme di  $R^2$  che non é misurabile (qui si può usare il fatto che esiste un sottoinsieme non misurabile di  $R$ ).

**B.** Si trovi un sottoinsieme  $E$  di  $R^2$  che é misurabile e tale che esiste  $x \in R$  con la proprietà che l'insieme

$$E_x = \{(x, y) | (x, y) \in E, y \in R\}$$

non é misurabile.

**C.** É possibile trovare un insieme  $E$  come nel punto **B** tale che  $E$  sia un insieme boreliano?