

Esonero Analisi Reale 12.11.2019

Non é consentito l'uso di libri o fotocopie, ad eccezione del materiale scritto a mano. Non é consentito l'uso di strumenti di comunicazione. Durante l'esame NON é consentito lasciare l'aula o fare domande.

Un esercizio, senza la giustificazione dei passaggi eseguiti, NON sarà preso in considerazione.

Le risposte non motivate, senza calcoli o incomprensibili non saranno prese in considerazione.

Consegnare solo questi fogli.

1. (10 pt) Sia $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ una enumerazione dei numeri razionali. Per $\epsilon > 0$ sia

$$U(\epsilon) = \cup_{r=1}^{\infty} (q_r - \frac{\epsilon}{2^r}, q_r + \frac{\epsilon}{2^r}).$$

Sia A l'insieme

$$A = \cap_{n=1}^{\infty} U(\frac{1}{n}).$$

Si dimostri che l'insieme A non è numerabile.

2. (10 pt) Sia A un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R} tale che esiste un numero $\delta \in (0, 1]$ tale che per ogni intervallo non vuoto (a, b) abbiamo che

$$|(a, b) \cap A| \geq \delta(b - a).$$

Si dimostri che

$$|A^c| = 0.$$

Non e permesso di usare teoremi fuori del materiale del corso.

3. Si dimostri che

$$\int_{[0, \frac{6}{\pi}]} \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| dx > 0,001.$$

(La formula $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ potrebbe essere utile)