

R1

B0Definiamo $f: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

in questo modo:

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3} \text{ se } 0 < y < |x-\frac{1}{2}|$$

e 0 altrove.

Sia m_2 la misura di Lebesgue
bidimensionale.

Dire (giustificando la risposta) se le
quantità

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx$$

$$\iint_{[0,1]^2} f(x,y) dm_2(x,y)$$

sono uguali.

B1

Soluzioni

La funzione f è antisimmetrica rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$ (cioè

$$f(\frac{1}{2} + x, y) = -f(\frac{1}{2} - x, y).$$

Per verificare se f è integrabile Lebesgue sul $[0, 1]^2$ basta verificare che

f è integrabile sul $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$.

Siccome f ha valori negativi, per il teorema di Tonelli, è sufficiente calcolare

$$\int_{[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]} f(x, y) d\mu_2(x, y)$$

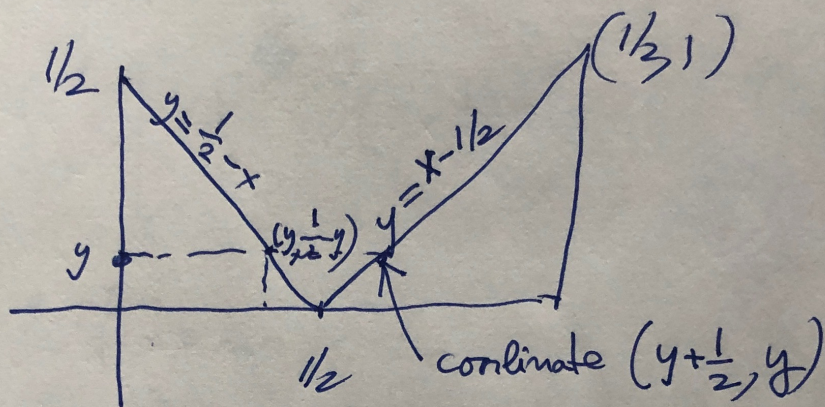
e questa è uguale a l'integrale calcolato

prima rispetto ad una variabile, poi rispetto all'altra

Dunque

B2

$$\int_{[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]} f(x, y) d\mu_2(x, y) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}-y} \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3} dx \right) dy =$$



$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(x-\frac{1}{2})^{-3+1}}{-3+1} \right]_0^{\frac{1}{2}-y} dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[(-y)^{-2} - \left(-\frac{1}{2} \right)^{-2} \right] dy =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{\frac{1}{2}} (y^{-2} - 4) dy = -\infty$$

Donc f non $\bar{e}$ intégrable Lebesgue

Calcoliamo

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[\int_0^{1/2-y} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3} dx + \int_{1/2+y}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3} dx \right] dy$$

Sia $g(y)$ la funzione

$$g(y) = \int_0^{1/2-y} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3} dx + \int_{1/2+y}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3} dx$$

Se $y \neq 0$, allora

$$\int_{1/2+y}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3} dx \text{ con il cambio di variabile}$$

$x_1 = 1 - x$, diventa

$$\int_{1-(1/2+y)}^{1-1} \left(1 - x_1 - \frac{1}{2}\right)^{-3} (-dx_1)$$

$$= - \int_{1/2-y}^0 \left(1/2 - x_1\right)^{-3} dx_1 = \int_0^{1/2-y} \left(1/2 - x_1\right)^{-3} dx_1 = - \int_0^{1/2-y} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3} dx$$

B4

Dunque per $y \neq 0$ abbiamo che

$$g(y) = 0$$

(se $y = 0$ integrali sono infiniti)

Dunque

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy = 0$$

Per l'integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx$$

abbiamo che questa è

$$\int_0^{1/2} \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx + \int_{1/2}^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx$$

la prima integrale vale $-\infty$ e per ^(anti)simmetria
la seconda vale ∞ , dunque l'integrale non è
definita.

co. Si consideri $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita
in questo modo

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 1$$

Si determini se f ~~è~~ ^{α} per $\alpha \geq 1$
è integrabile Lebesgue.

Soluzione. Se $\alpha > 1$

Sul intervallo $[0, 1]$, f è limitata.

$$\text{Sul } [1, \infty) \quad |f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

che è integrabile Lebesgue per $\alpha > 1$

Donzue f è integrabile

cl per $\alpha = 1$ dimostrare che $\int_{\mathbb{R}} |f| = \infty$.

Sul intervallo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ la funzione sin x
prende valori maggiori di $\frac{1}{2}$

Dunque

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| > \int \frac{1/2}{|x|} dx$$
$$\cup_{k \in \mathbb{N}} \left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \frac{1}{2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$$

Ma questa somma vale ∞

dunque f non è integrabile Lebesgue.