

Exercise 1 Sia C_5 l'analogo

del insieme di Cantor definito come in seguito:

Si divide $[0,1]$ in 5 parti uguali
(e si ~~rimuove~~ toglie l'intervallo in mezzo
(i.e. l'intervallo) $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$). Per i quattro intervalli rimasti
si ripete la procedura (e.g. ^{per esempio} d'al intervallo

$[0, \frac{1}{5}]$ si toglie l'intervallo $(\frac{2}{25}, \frac{3}{25})$).

Si ripete la procedura al ∞ . Quale
è la misura e la cardinalità del

insieme compatto rimasto.

* ~~La~~ lettera m indica la misura Lebesgue.
Solution. ~~La misura~~ la misura dei intervalli

rimossi è $\frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{25} + 16 \cdot \frac{1}{125} + \dots$

$$= \frac{1}{5} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^k \right) = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{5})} = 1.$$

Dunque $m(C_5) = 0$.

Nella base 5 i numeri di C_5 usano solo le
cifre $0, 1, 4, 5$. Dunque (con l'eccezione di un
insieme numerabile esiste una biiezione da C_5 a $[0,1]$).

Esercizio 2 (A) Si dimostra che esiste

un insieme misurabile (boreliano) $A \subseteq [0, 1]$,
di misura non nulla

tales che ~~(*)~~ qualunque sia $(a, b) \subseteq [0, 1]$

(non ~~non~~ intervallo non vuoto)

$$\text{(*) } m((a, b) \cap A) < (b - a)$$

(B) Quando ^{piccolo} ~~grande~~ ~~si~~ può ~~prendere~~ la
misura del insieme A ?

Soluzione (Una delle possibili). Sia $[0, 1]$

$$\varepsilon > 0, \text{ e sia } A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(2n - \frac{\varepsilon}{2^n}, 2n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \cap [0, 1]$$

dove $2n$ è una enumerazione dei razionali

$$\text{Allora } m(A_\varepsilon) \leq \varepsilon \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) = \varepsilon$$

$$\text{Ma } \chi_{A_\varepsilon} \uparrow 1 \text{ è dunque } m(A_\varepsilon) \rightarrow 1 \text{ (per } \varepsilon \rightarrow 1)$$

Quelunque sia (a, b) troviamo per n grande

$$2n \text{ vicino a } \frac{a+b}{2} \text{ è tale che } \frac{\varepsilon}{2^n} < \frac{b-a}{2}$$

$$\text{è dunque } \left(2n - \frac{\varepsilon}{2^n}, 2n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \subseteq (a, b)$$

Dunque $(a, b) \cap A$ non contiene questo intervallo che è nel
complemente di A . dunque $m((a, b) \cap A) < m((a, b) \setminus m(A))$

③ f, g sono due continue ^{sul $[a, b]$} tali che
 $f = g$ z.o. allora $f = g$.

Dimi. Basta se $f = 0$ z.o. f continua
allora $f = 0$. Siff. che se $|f| = 0$

allora $[a, b] \setminus Z$ è densa in $[a, b]$

Sia $x \in [a, b]$ arbitrario, e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ una nza

&

Esercizio 2

A) Si dimostra che esiste $A \subseteq [0,1]$ boreliano,
~~non~~ di misura non nulla,
tale che per qualunque intervallo aperto,
non vuoto (a,b) abbiamo che

$$|(a,b) \cap A| < b-a.$$

B) Si dimostra che qualunque sia $\varepsilon > 0$
esiste un insieme come nel punto
A tale che $|A| \geq 1 - \varepsilon$

Esercizio 3

Sia $[a,b]$ un intervallo
compatto e $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione
continue tale che $f = g$ su una densità.

Si dimostra allora che $f = g$ (i.e. $f(x) = g(x)$
per tutti $x \in [a,b]$), abbiamo che $f(x) = g(x)$.

Iterazione 1. Sia C_T l'angolo

del insieme di Cantor costruito come
segue: si divide l'intervallo $[0, 1]$

in cinque intervalli uguali ($[0, \frac{1}{5}]$, $[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$

$[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$, $[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$ e la parte centrale $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

viene rimossa. Si ripete la procedura.

Sono rimasti quattro intervalli. Ciascuno

di loro si divide in 5 parti uguali e la

parte centrale viene rimossa. Per esempio

dal intervallo $[0, \frac{1}{5}]$ viene rimosso l'intervallo

$[\frac{2}{25}, \frac{3}{25}]$, dal intervallo $[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$ viene

rimosso l'intervallo $[\frac{7}{25}, \frac{8}{25}]$. Si ripete

al ∞ la procedura. L'insieme dei punti

rimasti C_5 è compatto. la cardinalità di

Si dimostra che $|C_5| = 0$ è C_5 e quello del
continuum $([0, 1])$

A0

Calcolare il limite

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} \frac{u}{1+u^2 x} dx$$

per $a > 0$, $a = 0$, e $a < 0$

Si spieghi quando si può usare la teorema della
convergenza dominata

Soluzione. Se $a > 0$.

$$\text{Sia } f_u(x) = \frac{u}{1+u^2 x}$$

$$\text{allora } f_u(x) = \frac{1}{\frac{1}{u} + u x^2} \leq \frac{1}{u x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

e $f(x) = \frac{1}{x^2}$ è integrabile sul $[a, \infty)$

$$\text{Dunque } \int_a^{\infty} f_u(x) \text{ converge verso } \int_a^{\infty} \lim_{u \rightarrow \infty} f_u(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} 0 dx = 0$$

$$\text{per } a = 0 \quad \int_0^{\infty} \frac{u}{1+u^2 x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x_1^2} dx_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{per } a < 0 \text{ si usa } \int_a^{\infty} \frac{u}{1+u^2 x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{1+u^2 x} dx - \int_{-\infty}^a \frac{u}{1+u^2 x} dx = \pi (\text{in limite}).$$

R1

B0Definiamo $f: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

in questo modo:

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3} \text{ se } 0 < y < |x-\frac{1}{2}|$$

e 0 altrove.

Sia m_2 la misura di Lebesgue
bidimensionale.

Dire (giustificando la risposta) se le
quantità

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx$$

$$\iint_{[0,1]^2} f(x,y) dm_2(x,y)$$

sono uguali.

R1

B0Definiamo $f: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

in questo modo:

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3} \text{ se } 0 < y < |x-\frac{1}{2}|$$

e 0 altrove.

Sia m_2 la misura di Lebesgue
bidimensionale.

Dire (giustificando la risposta) se le
quantità

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy, \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx$$

$$\iint_{[0,1]^2} f(x,y) dm_2(x,y)$$

sono uguali.