ARC 18/19, Iannuzzi-Rădulescu Nome:

# Analisi Reale e Complessa

II appello, 26 febbraio 2019

**Non è consentito l'uso di libri o fotocopie, ad eccezione del materiale scritto a mano con le formule. Non è consentito l'uso di strumenti di comunicazione. Durante l'esame NON è consentito lasciare l'aula o fare domande. Un esercizio, senza la giustificazione dei passaggi eseguiti, NON sarà presso in considerazione. Le risposte non motivate, senza calcoli o incomprensibili non saranno prese in considerazione. Consegnare solo questi fogli.**

---

**1.** **A.**(4 pt) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{1+n^2 x}\,\mathrm{dx},$$

per $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.

**B.**(2 pt) Si spieghi in quale dei casi di sopra si può usare il teorema della convergenza dominata.

**2.** (6 pt) Definiamo $f : [0,1]^2 :\to \mathbb{R}$ in questo modo:

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}, \text{ se } 0 < y < |x - \frac{1}{2}|,$$

e 0 altrove. Sia $m_2$ la misura di Lebesgue bidimensionale.

Dire (giustificando la risposta) se le quantità:

$$\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)\, \mathrm{d}x)\, \mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)\, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x, \qquad \int_{[0,1]^2} f(x,y)\, \mathrm{d}m_2(x,y),$$

sono uguali.

**3**. (6 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in questo modo

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \quad \text{se } x \neq 0, \qquad f(0) = 1.$$

Si determinino i valori di $\alpha \geq 1$ tali che $f^\alpha$ sia Lesbegue integrabile (giustificare la risposta).

**4**. (6 pt) **A.** Per $j = 1, 2, 3$ siano $u_j : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definite da $u_1(x+iy) = \cos^2 x \cosh^2 y\,,$

$$u_2(x+iy) = \cos^2 x \cosh^2 y + x \sinh y\,, \qquad u_3(x+iy) = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$$

Per ogni $j = 1, 2, 3$ stabilire se esiste $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $\mathrm{Re}\, f_j = u_j$. In caso affermativo determinarla esplicitamente, altrimenti motivare la risposta.
**B.** Sia $L$ la corona circolare definita da $L := \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < |z| < 2\}$ e sia $u : L \to \mathbb{R}$ armonica. Esiste sempre una funzione olomorfa $f : L \to \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, f = u$? In caso affermativo dimostrarlo, altrimenti esibire un controesempio.

**5**. (6 pt) Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+2)(z^2+2z+4)}dz$$

nei casi in cui
**A.** $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$,
**B.** $\gamma(\theta) = ne^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$,
**C.** $\gamma(t) = t$, per $t \in (0, \infty)$.