

Analisi Reale e Complessa

III appello, 11 giugno 2019

Non è consentito l'uso di libri o fotocopie, ad eccezione del materiale scritto a mano con le formule. Non è consentito l'uso di strumenti di comunicazione.

Durante l'esame NON è consentito lasciare l'aula o fare domande. Un esercizio, senza la giustificazione dei passaggi eseguiti, NON sarà preso in considerazione. Le risposte non motivate, senza calcoli o incomprensibili non saranno prese in considerazione. Consegnare solo questi fogli.

1. (6 pt) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme misurabile di misura finita e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una funzione misurabile. Dimostrare che f è quasi ovunque finita in E se e solo se f è quasi limitata in E , nel senso che per ogni $\epsilon > 0$ esistono un chiuso $K \subseteq E$ ed una costante $c > 0$ tali che

$$|f| < c \text{ in } K \text{ e } |E \setminus K| < \epsilon.$$

Rimane questo vero se E non è di misura finita?

2. (6 pt) Sia A un sottoinsieme di R^d e $\alpha \in R$. Si dimostri che

$$|\alpha A|_e = |\alpha| |A|_e.$$

3. (6 pt) Per ciascuna delle seguenti funzioni meromorfe su $\mathbb{C}$, trovare tutti i poli e intorno a ciascun polo trovare lo sviluppo di Laurent:

$$\frac{z^3}{z+2},$$

$$\frac{\sin z}{z+\pi},$$

$$\frac{(z-2)^2}{z(z-1)}.$$

4. (6 pt) Sia z_0 in un aperto A di $\mathbb{C}$ e sia $f : A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa
- A.** Mostrare che se z_0 è una singolarità polare di f allora la funzione olomorfa $z \rightarrow e^{f(z)}$ ha una singolarità essenziale in z_0 .
- B.** Mostrare che se z_0 è una singolarità essenziale di f allora la funzione olomorfa $z \rightarrow e^{f(z)}$ ha una singolarità essenziale in z_0 .

5. (6 pt) Calcolare i seguenti integrali

$$\int_{\gamma} \frac{ze^{-iz}}{(z-i)^3} dz,$$

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(e^z - 1) \sin z} dz$$

dove $\gamma(\theta) = \pi/2 + \pi e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$.