UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA
Facoltà di Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti

Soluzioni compito n.1

1 a) È ragionevole considerare la distribuzione uniforme di probabilità. 2 casi favorevoli contro 5 totali, la probabilità richiesta è $\frac{2}{5}$.

Per rispondere alle domande b) e c), si può prendere come Ω le coppie ordinate di $\{1,2,3,4,5\}$ con coordinate diverse l'una dall'altra:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \neq \omega_2 \,\mathrm{e}\, \omega_i \in \{1,2,3,4,5\}\}$$

cioè Ω è l'insieme delle disposizioni senza ripetizione di 2 elementi presi da un insieme che ne contiene 5. Si ha $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$.

b) Occorre calcolare $\mathrm{P}(B)$, con $B = \{\omega \in \Omega : \omega_2 \in \{2,4\}\}$. Ora se $\omega_1 \in \{1,3,5\}$ allora per ω_2 sono due i casi possibili; se invece $\omega_1 \in \{2,4\}$, allora per ω_2 abbiamo una sola possibilità. Quindi $|B| = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$ e

$$\mathrm{P}(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}\cdot$$

Si sarebbe anche potuto osservare che, come si è visto a lezione, in uno schema di estrazioni senza rimpiazzo la probabilità di estrarre una pallina di un dato colore è la stessa alla prima, come alla seconda estrazione (come anche all'n-esima) (vedi l'Esempio 1.14 e l'Esempio 1.24).

c) Occorre calcolare $\mathrm{P}(C)$, con $C = \{\omega \in \Omega : \omega_1, \omega_2 \in \{2,4\}\}$. La cardinalità di C è pari al numero di disposizioni senza ripetizione di 2 elementi presi da un insieme che ne contiene 2: $|C| = 2 \cdot 1 = 2$, da cui segue che

$$\mathrm{P}(C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}\cdot$$

Si sarebbe anche potuto applicare la distribuzione ipergeometrica: la probabilità di estrarre due palline del gruppo "pari" su due estrazioni dà qui come risultato

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{2!\,3!}{5!} = \frac{1}{10}\cdot$$

2 Indichiamo con A e B gli eventi "il messaggio proviene dal canale A" e "il messaggio proviene dal canale B" rispettivamente. Per $i \geq 1$, indichiamo con X_i il valore dell'i-esimo bit (0 o 1).

a) Si chiede $\mathrm{P}(X_n = 1)$:

$$\mathrm{P}(X_n = 1) = \mathrm{P}(X_n = 1|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(X_n = 1|B)\mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot$$

b) Si chiede $\mathrm{P}(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1)$:

$$\mathrm{P}(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)}{\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)}$$
$$= \frac{\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1|B)\mathrm{P}(B)}$$
$$= \frac{(\frac{2}{3})^3 \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{3})^3 \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\cdot$$

c) Abbiamo visto che $\mathrm{P}(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2} = \mathrm{P}(X_3 = 1)$. Ciò prova che le X_i non sono indipendenti, quindi anche gli eventi $\{$*l'i-esimo bit è* 1$\}$ non sono indipendenti.

d) Si chiede $\mathrm{P}(A|X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1)$:

$$\mathrm{P}(A|X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1) = \frac{\mathrm{P}(X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1)}$$
$$= \frac{\mathrm{P}(X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1|B)\mathrm{P}(B)}$$
$$= \frac{(\frac{2}{3})^n \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{2}{3})^n \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{3})^n \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2^n}{2^n + 1}\cdot$$

3 a) Si tratta di calcolare $\mathrm{P}(X = k)$. Ora, condizionalmente a $\{N = n\}$, la v.a. X è $B(n,p)$, quindi

$$\mathrm{P}(X = k) = \sum_{n \geq k} \mathrm{P}(X = k|N = n)\mathrm{P}(N = n) = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$
$$\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}\cdot$$

Quindi X è una v.a. di Poisson di parametro λp.

Alternativamente, si sarebbe potuto osservare che si può scrivere $X = X_1 + \ldots + X_N$, dove $X_1, X_2, \ldots$ è una successione di v.a. indipendenti e di Bernoulli $B(1,p)$. La formula per la funzione generatrice di una somma aleatoria (Proposizione 2.41 degli appunti) dà, per la funzione generatrice di X,

$$\psi_X(z) = \psi_N(\psi_{X_1}(z)) = \mathrm{e}^{\lambda((pz+1-p)-1)} = \mathrm{e}^{p\lambda(z-1)},$$

che è la funzione generatrice di una v.a. di Poisson di parametro λp. Con ragionamenti del tutto analoghi si ottiene che Y è di Poisson di parametro $\lambda(1-p)$.

b) Si tratta di far vedere che per ogni $k, h \geq 0$ $\mathrm{P}(X = k, Y = h) = \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = h)$. Ora ricordando che, condizionalmente a $\{N = k + h\}$ la densità di X è $B(k+h, p)$, si ha:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = k, Y = h) &= \mathrm{P}(X = k, N = k+h) = \mathrm{P}(X = k | N = k+h)\mathrm{P}(N = k+h) \\ &= \binom{k+h}{k} p^k (1-p)^h \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+h}}{(k+h)!} = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^h}{h!} \\ &= \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = h).\end{aligned}$$