FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA
SOLUZIONI ESONERO, 15 GIUGNO 2002
A.A. 2001-2002

Esercizio 1.

a) Utilizzando la distribuzione ipergeometrica la probabilità richiesta vale

$$\frac{\binom{60}{10} \binom{30}{0}}{\binom{90}{10}}$$

b) La probabilità richiesta è (si usa sempre utilizzando la distribuzione ipergeometrica)

$$\frac{\binom{45}{10} \binom{45}{0}}{\binom{90}{10}}$$

c) Sia $A_i = \{\text{la } i\text{-esima pallina estratta è la numero } i\}$. La probabilità di estrarre la pallina i è la stessa ad ogni estrazione (sia che le estrazioni siano con rimpiazzo che senza rimpiazzo) pertanto $P(A_i) = P(A_1) = \frac{1}{90}$

d) La probabilità che le prime due palline estratte siano proprio le numero 1 e 2 (nell'ordine) è la probabilità dell'evento $A_1 \cap A_2$.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89}$$

Alternativamente si può anche considerare lo spazio $\Omega = D_2^{90}$, delle disposizioni di 90 elementi a 2 a 2. La cardinalità di Ω è $90 \cdot 89$ e la probabilità di osservare la disposizione $(1, 2)$ è dunque $1/(90 \cdot 89)$.

La probabilità che le prime due siano le 1 e 2 in un ordine qualunque è ovviamente uguale alla probabilità di osservare una delle due disposizioni $(1, 2)$ oppure $(2, 1)$. Si tratta quindi del doppio della probabilità appena trovata, ovvero $2/(90 \cdot 89)$. Alternativamente si può arrivare allo stesso risultato usando lo stesso ragionamento di a): utilizzando la distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{2}{2} \binom{88}{0}}{\binom{90}{2}} = \frac{2}{90 \cdot 89}$$

Esercizio 2.

i) Siano:

$$\begin{aligned}A &= \{\text{il segnale è trasmesso dalla sorgente } A\} \\B &= \{\text{il segnale è trasmesso dalla sorgente } B\} \\C &= \{\text{il segnale trasmesso è corretto}\}.\end{aligned}$$

Allora,

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

ii) Per la formula di Bayes,

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}.$$

Esercizio 3.

i) S può assumere i valori $\{0, 1, 2\}$. Si ha, usando il fatto che X e Y sono indipendenti,

$$\begin{aligned}P(S = 0) &= P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \\P(S = 2) &= P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \\P(S = 1) &= 1 - [P(S = 0) + P(S = 2)] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

D può assumere i valori $\{-1, 0, 1\}$. Allo stesso modo

$$\begin{aligned}P(D = -1) &= P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \\P(D = 1) &= P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \\P(D = 0) &= 1 - [P(D = 1) + P(D = -1)] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ii) Per calcolare la distribuzione congiunta si osservi che:

$$\begin{aligned}X = 0, Y = 0 &\Leftrightarrow S = 0, D = 0 \\X = 1, Y = 0 &\Leftrightarrow S = 1, D = 1 \\X = 0, Y = 1 &\Leftrightarrow S = 1, D = -1 \\X = 1, Y = 1 &\Leftrightarrow S = 2, D = 0\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}P(S = 0, D = 0) &= P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\P(S = 1, D = 1) &= P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\P(S = 1, D = -1) &= P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\P(S = 2, D = 0) &= P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Quindi (S, D) può prendere i quattro valori $(0, 0), (1, 1), (2, 0), (1, -1)$, tutti con probabilità $\frac{1}{4}$.

iii) S e D non sono indipendenti, infatti

$$0 = P(S = 1, D = 0) \neq P(S = 1)P(D = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

iv)

$$\begin{aligned}\text{Cov}(S, D) &= \mathbb{E}[SD] - \mathbb{E}[S]\mathbb{E}[D] = \mathbb{E}[(X + Y)(X - Y)] - \mathbb{E}[X + Y]\mathbb{E}[X - Y] = \\ &= \mathbb{E}[X^2 - Y^2] - (\mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2) = \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 - (\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2) = \\ &= \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = 0,\end{aligned}$$

dato che X e Y hanno stessa distribuzione e quindi stessa varianza.

v) Ricordiamo che la varianza della somma di variabili indipendenti è uguale alla somma delle varianze. Dunque

$$\begin{aligned}\text{Var}(S) &= \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2p(1 - p) \\ \text{Var}(D) &= \text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X + (-Y)) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2p(1 - p)\end{aligned}$$