Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle probabilità e statistica
Soluzioni appello 9 luglio 2002
a.a. 2001-2002

Esercizio 1. a) Usando le formule della densità ipergeometrica, la probabilità richiesta vale

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{7}{0}}{\binom{11}{2}} = \frac{4\cdot 3}{11\cdot 10} = 0.11$$

b) Se la prima pallina estratta è bianca, nell'urna sono rimaste 4 palline rosse e 6 bianche. La probabilità che la seconda e la terza estratta siano entrambe rosse vale ora

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{4\cdot 3}{10\cdot 9} = 0.13$$

Con un ragionamento analogo, se la prima pallina estratta è rossa la probabilità che la seconda e la terza estratta siano entrambe rosse vale

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{3\cdot 2}{10\cdot 9} = 0.07$$

c) Indichiamo con R_1,B_1 rispettivamente gli eventi "la prima pallina estratta è rossa" e "la prima pallina estratta è bianca" e con R l'evento "la seconda e la terza pallina estratte sono rosse", allora per la formula delle probabilità totali

$$P(R) = P(R\mid R_1)P(R_1) + P(R\mid B_1)P(B_1)$$

Chiaramente $P(R_1) = \frac{4}{11}$ e $P(B_1) = \frac{7}{11}$, mentre le probabilità condizionali $P(R\mid R_1)$ e $P(R\mid B_1)$ sono state calcolate in b). Dunque

$$P(R) = \frac{3\cdot 2}{10\cdot 9}\,\frac{4}{11} + \frac{4\cdot 3}{10\cdot 9}\,\frac{7}{11} = \frac{9\cdot 3\cdot 4}{9\cdot 10\cdot 11} = \frac{4\cdot 3}{10\cdot 9} = 0.13$$

Cioè la probabilità è la stessa che quella di estrarre due palline rosse nelle prime due estrazioni (calcolata in a)).

Esercizio 2. a) Indichiamo con T_1 il tempo di vita di un componente prodotta dalla prima linea di produzione e con F_1 la f.r. di T_1. La probabilità richiesta è

$$P(T_1 > 1) = 1 - F_1(1)$$

Ricordiamo che la f.r. G di una v.a. esponenziale di parametro λ vale $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Dunque

$$P(T_1 > t) = e^{-1} = 0.37$$

Con lo stesso ragionamento, indicando con T_2 il tempo di vita di un componente uscito dalla seconda linea di produzione e con F_2 la relativa f.r., la probabilità che un componente della seconda linea sia ancora funzionante al tempo 1 vale

$$P(T_2 > 1) = 1 - F_2(1) = e^{-2} = 0.14$$

b) Se indichiamo con A e B rispettivamente gli eventi "il componente prescelto proviene dalla prima linea" e "il componente prescelto proviene dalla seconda linea", allora per la formula delle probabilità totali la probabilità richiesta vale

$$\begin{aligned} P(X>1) &= P(X>1\mid A)P(A) + P(X>1\mid B)P(B) = \\ &= P(T_1>t)P(A) + P(T_2>1)P(B) = e^{-1}\cdot 0.3 + e^{-2}\cdot 0.7 = 0.21 \end{aligned}$$

Sapendo che il componente è ancora funzionante al tempo 1, la probabilità che esso provenga dalla seconda linea di produzione si calcola con la formula di Bayes e vale

$$P(A\mid X>1) = \frac{P(X>1\mid A)P(A)}{P(X>1)} = 46.18\%$$

c) La funzione di ripartizione di X si calcola facilmente ripetendo il ragionamento di b):

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X\le t) = P(X\le t\mid A)P(A) + P(X\le t\mid B)P(B) = \\ &= P(T_1>t)P(A) + P(T_2>1)P(B) = (1-e^{-t})\cdot 0.3 + (1-e^{-2t})\cdot 0.7 \end{aligned}$$

Per calcolare la $E(X)$, calcoliamo prima la densità di X. Derivando si ha

$$f_X(t) = F_X'(t) = e^{-t}\cdot 0.3 + 2\,e^{-2t}\cdot 0.7$$

Dunque

$$E(X) = 0.3\cdot\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt + 0.72\cdot\int_0^{+\infty} t\,e^{-2t}\,dt = 0.3 + 0.7\,\frac{1}{2} = 0.65$$

Esercizio 3. a) Usiamo la densità ipergeometrica: consideriamo le palline divise nei due gruppi composti dalla pallina n.1 e da tutte le altre. In ogni estrazione vengono estratte 5 palline senza rimpiazzo. Quindi la probabilità che la n.1 figuri tra di esse è

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

b) Indichiamo con X_i la v.a. che vale 1 se la pallina n.1 viene estratta alla i-esima estrazione e 0 altrimenti. Per il calcolo fatto in a), X_i è una v.a. di Bernoulli di parametro $p = \frac{1}{18}$.

$S_{100} = X_1 + \ldots + X_{100}$ è il numero di volte che la n.1 appare nelle prime 100 estrazioni e la probabilità richiesta è dunque $P(S_{100}\ge 12)$. Usando l'approssimazione normale

$$\begin{aligned} P(S_{100}\ge 12) &= P(S_{100} > 11.5) = 1 - P(S_{100}\le 11.5) = 1 - \Phi\Big(\frac{11.5 - 100\,\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{1}{18}\frac{17}{18}}\sqrt{100}}\Big) = 1 - \Phi(2.6) \\ &== 1 - 0.99534 = 0.466\% \end{aligned}$$