

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA  
SOLUZIONI APPELLO 18 LUGLIO 2002  
A.A. 2001-2002

**Esercizio 1.**

- a) Sia  $A = \{\text{la pallina nera è tra le 3 palline estratte}\}$ , ovvero  $A$  corrisponde al fatto di vincere. Utilizzando la distribuzione ipergeometrica si ha

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1} \binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{2}.$$

- b) Sia  $B = \{\text{la pallina nera non è tra le prime 2 estratte}\}$ . Se  $B$  è verificato, nell'urna sono rimaste 4 palline, di cui una nera. La probabilità che quest'ultima venga estratta nella terza estrazione è ovviamente

$$P(A|B) = \frac{1}{4}.$$

- c) Sempre utilizzando la distribuzione ipergeometrica

$$P(B) = \frac{\binom{1}{0} \binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Pertanto

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

**Esercizio 2.**

- a) Essendo  $Y$  una variabile positiva per vedere se ammette media possiamo direttamente calcolare l'integrale:

$$E[Y] = E(\sqrt{X}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Ricordando l'espressione della densità Gamma,

$$E[Y] = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{1/2}} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{3/2-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{1/2}}.$$

Perché esista la varianza di una variabile aleatoria deve esistere la media della variabile al quadrato. In questo caso  $Y^2 = X$  è una v.a. esponenziale e la sua media vale  $\frac{1}{\lambda}$ . Pertanto  $E(Y^2) = \frac{1}{\lambda}$  e

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[X] - E[Y]^2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{\lambda}.$$

- b) Procediamo come al solito calcolando la funzione di ripartizione di  $Y$ . Per  $y > 0$  si ha (indicando con  $F_X$  e  $F_Y$  le funzioni di ripartizione delle v.a.  $X$  e  $Y$  rispettivamente):

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2),$$

pertanto derivando sempre per  $y > 0$  si ha (indicando con  $f_X$  e  $f_Y$  le densità delle v.a.  $X$  e  $Y$  rispettivamente):

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y^2) = f_X(y^2) \cdot 2y,$$

ovvero

$$f_Y(y) = 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, \quad y > 0.$$

Naturalmente  $F_Y(y) = 0$  se  $y \leq 0$ .

- c) Calcoliamo dapprima  $P(Y > s)$  per  $s > 0$ . Poiché già conosciamo la funzione di ripartizione di  $Y$ ,

$$P(Y > s) = 1 - P(Y \leq s) = e^{-\lambda s^2}.$$

Pertanto

$$P(Y > 2|Y > 1) = \frac{P(Y > 2, Y > 1)}{P(Y > 1)} = \frac{P(Y > 2)}{P(Y > 1)} = \frac{e^{-4\lambda}}{e^{-\lambda}} = e^{-3\lambda}.$$

Perché una variabile positiva  $Y$  goda della proprietà della mancanza di memoria si deve avere per ogni  $s, t > 0$

$$P(Y > t + s|Y > s) = P(Y > t).$$

Dunque si dovrebbe avere (se  $s = t = 1$ ),

$$P(Y > 2|Y > 1) = P(Y > 1),$$

ma, per quanto appena visto,

$$P(Y > 2|Y > 1) = e^{-3\lambda} \quad \text{mentre} \quad P(Y > 1) = e^{-\lambda},$$

quindi la variabile  $Y$  non gode della suddetta proprietà.

### Esercizio 3. Poniamo

$A = \{\text{il messaggio è trasmesso dal canale } A\},$

$B = \{\text{il messaggio è trasmesso dal canale } B\},$

$X = \text{numero di 1 in un messaggio di lunghezza } n.$

Si ha  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$

- a) Il numero di 1 in un messaggio di lunghezza  $n$  proveniente da  $A$  segue una legge binomiale  $B(n, \frac{1}{3})$ . Dunque la probabilità di un messaggio di tre bit con due 1 e uno 0 proveniente da  $A$  è

$$P(X = 2|A) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Viceversa il numero di 1 in un messaggio di lunghezza  $n$  proveniente da  $B$  segue una legge binomiale  $B(n, \frac{2}{3})$ . Dunque la probabilità di un messaggio di tre bit con due 1 e uno 0 proveniente da  $B$  è

$$P(X = 2|B) = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

b) Gli eventi  $A$  e  $B$  costituiscono una partizione dell'evento certo e quindi

$$P(X = 2) = P(X = 2|A)P(A) + P(X = 2|B)P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

c) Per la formula di Bayes,

$$P(B|X = 2) = \frac{P(X = 2|B)P(B)}{P(X = 2)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

d) Per un messaggio proveniente da  $B$ , come abbiamo visto, segue una legge binomiale  $B(450, \frac{2}{3})$  con media  $np = 300$  e varianza  $np(1-p) = 100$ . Usando l'approssimazione normale (qui con correzione) e indicando con  $Z$  una normale standard la probabilità richiesta è

$$\begin{aligned} P(X \geq 290) &\simeq P\left(Z \geq \frac{289.5 - 300}{10}\right) = \\ &= P(Z \geq -1.05) = 1 - \Phi(-1.05) = \Phi(1.05) = 0.85314. \end{aligned}$$