Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle probabilità e statistica
Soluzioni appello 9 luglio 2002
a.a. 2001-2002

Esercizio 1. Indichiamo con X e Y rispettivamente il numero d'insetti e di uova sopravvissuti al trattamento. Se supponiamo che ogni insetto o uovo sopravviva o no indipendentemente dagli altri, è chiaro che X e Y devono considerarsi indipendenti e che

$$X \sim B(100, .001), \quad Y \sim B(200, .005)$$

a) La probabilità richiesta non è altro che $\mathrm{P(X = 0, Y = 0)}$, cioè

$$(1 - .001)^{100} \cdot (1 - .005)^{200} = 0.33$$

b) La probabilità richiesta ora è

$$\begin{gathered}
\mathrm{P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1)} = \\
(1 - .001)^{100} \cdot (1 - .005)^{200} + \\
100 \cdot .001 \cdot (1 - .001)^{99} \cdot (1 - .005)^{200} + (1 - .001)^{100} \cdot 200 \cdot .005 \cdot (1 - .005)^{199} \\
= 0.33 + 0.03 + 0.33 = 0.69
\end{gathered}$$

Esercizio 2.

a)

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}[X] = \int_0^1 x \cdot \alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}(1-x)dx = \\
\alpha(\alpha+1)\int_0^1 (x^\alpha - x^{\alpha+1})dx = \alpha(\alpha+1)\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)\Big|_0^1 = \\
\alpha(\alpha+1)\Big(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\Big) = \frac{\alpha}{\alpha+2}.
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot \alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}(1-x)dx = \\
\alpha(\alpha+1)\int_0^1 (x^{\alpha+1} - x^{\alpha+2})dx = \alpha(\alpha+1)\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{x^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right)\Big|_0^1 = \\
\alpha(\alpha+1)\Big(\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+3}\Big) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+2)(\alpha+3)}.
\end{gathered}$$

Pertanto

$$\begin{gathered}
\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \\
\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+2)^2} = \\
\frac{2\alpha}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)}.
\end{gathered}$$

b)

$$\mathrm{E}[1/X] = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}(1-x)dx =$$
$$\alpha(\alpha+1)\int_0^1 (x^{\alpha-2} - x^{\alpha-1})dx.$$

Perché questo integrale sia assolutamente convergente deve essere:

$$\begin{cases} \alpha - 2 > -1 \\ \alpha - 1 > -1 \end{cases}$$

ovvero $\alpha > 1$. In questo caso si ha

$$\mathrm{E}[1/X] = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}(1-x)dx =$$
$$\alpha(\alpha+1)\int_0^1 (x^{\alpha-2} - x^{\alpha-1})dx =$$
$$\alpha(\alpha+1)\Big(\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1} - \frac{x^\alpha}{\alpha}\Big)\Big|_0^1 = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

c) Per il calcolo della densità di Y procediamo come al solito calcolando prima la funzione di ripartizione. Osserviamo dapprima che, essendo X una v.a. a valori $[0,1]$, Y è a valori in $(-\infty, 0]$. Pertanto, per $y \le 0$,

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(\log X \le y) =$$
$$\mathrm{P}(X \le \mathrm{e}^y) = F_X(\mathrm{e}^y) = \int_0^{\mathrm{e}^y} \alpha(\alpha+1)\, x^{\alpha-1}(1-x)dx.$$

Ricordando la regola di derivazione di una funzione composta o di una funzione integrale si ottiene per $y \le 0$:

$$f_Y(y) = f_X(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y =$$
$$\alpha(\alpha+1)\,\mathrm{e}^{y(\alpha-1)}(1-\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y = \alpha(\alpha+1)\,\mathrm{e}^{y\alpha}(1-\mathrm{e}^y).$$

Esercizio 3. Le v.a. X_k sono di Bernoulli di parametro $p = 1/2$, quindi di media $1/2$ e varianza $1/4$. Dunque, posto $S_n = X_1 + \ldots + X_n = n \cdot \bar{X}_n$, $S_n \sim B(n, 0.5)$ e $\mathrm{E}[S_n] = n/2$ e $\mathrm{Var}(S_n) = n/4$.

a) Per il teorema limite centrale, indicando con Z una v.a. $N(0,1)$, si ha

$$\mathrm{P}(\bar{X}_{900} \ge 0.51) = \mathrm{P}(900 \cdot \bar{X}_{900} \ge 900 \cdot 0.51) = \mathrm{P}(S_{900} \ge 459)$$
$$\approx \mathrm{P}\Big(Z \ge \frac{458.5 - 450}{15}\Big) = 1 - \Phi(0.567) = 1 - 0.715 = 0.285 = 28.5\%$$

Nella formula precedente abbiamo scritto 458.5 invece di 459, usando la correzione di continuità, dato che la v.a. S_{900} prende solo valori interi. Se non l'avessimo usata avremmo trovato $(459-450)/15 = 0.6$ e $1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.726 = 0.274 = 27.4\%$. Se avessimo avuto a disposizione le tavole della densità binomiale $B(900, .5)$, avremmo potuto vedere che la probabilità che una v.a. con questa densità prenda valori ≥ 459 è uguale a 0.2854.

b) Con un ragionamento analogo,

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_{900} - 0.5| \leq 0.01) = \mathrm{P}(|S_{900} - 450| \leq 9) \approx \mathrm{P}\Big(|Z| \leq \frac{9.5}{15}\Big) =$$
$$= 2\Phi(0.63) - 1 = 2 \cdot 0.73565 - 1 = 0.4713 = 47.13\%$$

c) Per semplicità di conti non utilizzando la correzione di continuità si ha:

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - 0.5| \leq 0.01) = \mathrm{P}(|S_n - n/2| \leq 0.01 \cdot n) =$$
$$\mathrm{P}\Big(\frac{|S_n - n/2|}{\sqrt{n}/2} \leq \frac{0.01 \cdot n}{\sqrt{n}/2}\Big) \approx \mathrm{P}(|Z| \leq 0.02\sqrt{n}).$$

Poiché sappiamo che $\mathrm{P}(|Z| \leq 0.02\sqrt{n}) = 2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1$, affinché si abbia

$$\mathrm{P}(|Z| \leq 0.02\sqrt{n}) > 0.95$$

deve essere $\Phi(0.02\sqrt{n}) > 0.975$, ovvero, indicando con $z_{0.975} = 1.96$ il quantile di ordine 0.975 di una normale standard:

$$0.02\sqrt{n} > z_{0.975}$$

ovvero

$$n > \Big(\frac{1.96}{0.02}\Big)^2 = 9604.$$