UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Facoltà d'Ingegneria

Anno 2001-02

Corso di *Calcolo delle probabilità e statistica*
P.Baldi, L.Caramellino, B.Pacchiarotti, E.Presutti

Lista di Esercizi n.2

E2.1 (2.4) a) Un dado viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità che il 6 sia uscito esattamente 2 volte?

b) Qual è la probabilità che in n lanci il 6 sia uscito esattamente 2 volte? Per quale valore di n questa probabilità è massima?

E2.2 (2.7) Un calcolatore è collegato ad una rete che permette l'accesso ad un massimo di 20 persone. Collegati a questa rete vi sono i terminali di 24 operatori, ognuno dei quali, ad un dato istante, richiede con probabilità $p = 0.6$ di essere connesso al calcolatore centrale. Qual è la probabilità che, ad un dato istante, la rete sia satura (cioè che tutti e 20 gli accessi siano utilizzati)?

E2.3 (2.2) Un'urna contiene 112 dadi di cui 56 (cioè la metà) sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 sia $\frac{1}{2}$, mentre ogni altro risultato si verifica con probabilità $\frac{1}{10}$.

a) Un dado viene estratto a caso e lanciato; indichiamo con X il risultato del lancio. Qual è la probabilità di ottenere 3? Quanto vale $E(X)$?

b) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Qual è la probabilità di ottenere 2 e 3? Sapendo che i due lanci hanno dato 2 e 3, qual è la probabilità che si tratti di uno dei dadi truccati?

c) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Indichiamo con X e Y il risultato dei due lanci. Si tratta di v.a. indipendenti?

E2.4 (2.3) Due dadi equilibrati vengono lanciati separatamente più volte. Indichiamo con X il numero di lanci necessario a ottenere 1 con il primo dado e con Y il numero di lanci necessario a ottenere 5 oppure 6 con il secondo.

a) Qual è la legge di X? Qual è la legge di Y? Quanto valgono $E(X)$ e $E(Y)$?

b) Calcolare la densità di $Z = \max(X, Y)$. Quanto vale $E(Z)$?

c) Calcolare $P\{X \geq Y\}$.

E2.5 (2.12) Siano $X_1, \ldots, X_n$ delle v.a. di Bernoulli $B(1, p)$ indipendenti e poniamo $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

a) Qual è la distribuzione condizionale di X_i sapendo che $S_n = r$?

b) Se $m < n$ e $S_m = X_1 + \ldots + X_m$ qual è la legge condizionale di S_m sapendo che $S_n = r$? Si tratta di una legge nota? Quanto vale la media condizionale di S_m sapendo che $S_n = r$? |

E2.6 (2.13) Da un'urna contenente palline rosse in proporzione p, $0 < p < 1$ vengono estratte con reimbussolamento n palline. Queste vengono messe in una seconda urna da cui viene quindi estratta una sola pallina.

a) Qual è la probabilità che sia rossa?

b) Sapendo che l'estrazione dalla seconda urna ha dato una pallina rossa, qual è la probabilità che il numero di palline rosse estratte dalla prima urna fosse k $(0 \leq k \leq n)$? Qual è il numero medio di palline rosse estratte dalla prima urna sapendo che la pallina estratta dalla seconda è rossa?

E2.7 (2.14) Da un alfabeto composto da n lettere viene formata una parola di lunghezza k scegliendo ogni lettera a caso e in maniera indipendente l'una dall'altra.

a) Qual è la probabilità che la i–esima lettera venga usata? Come si comporta questa probabilità se $k = n$ e $n \to \infty$?

b) Qual è il numero medio di lettere utilizzate? Quanto vale questa quantità per $n = 21$ e $k = 100$? E $k = 50$? Quanto vale il numero medio se invece supponessimo che la probabilità di scegliere la lettera i sia p_i dove $0 < p_i < 1$, $p_1 + \ldots + p_n = 1$ (ma le lettere siano sempre indipendenti)? Quanto vale questo numero medio per $n = 21$, $k = 100$ e supponendo che le lettere siano divise in 3 gruppi di 7, con il primo gruppo formato da lettere con $p_i = \frac{3}{28}$, mentre per gli altri due gruppi $p_i = \frac{3}{112}$ e $p_i = \frac{1}{112}$ rispettivamente?

E2.8 (2.15) Una compagnia di assicurazioni ha un numero N (molto grande) di assicurati contro un dato rischio che ha una probabilità p (piccola) di colpire ogni singolo assicurato nel corso di un anno. Indichiamo con X e Y il numero di assicurati che la compagnia sarà chiamata a indennizzare nel primo e nel secondo anno rispettivamente. $Z = X + Y$ è dunque il numero d'indennizzi nei primi due anni. Per la natura del rischio si può supporre che eventi che si riferiscono ad assicurati diversi siano indipendenti, come pure che siano indipendenti le v.a. X e Y.

a) Quale legge è ragionevole assumere per la v.a. X? E per Z? Quanto vale la densità congiunta di X, Z?

b) La compagnia versa per ogni assicurato, in caso d'incidente, un indennizzo pari a I e percepisce da ogni assicurato un premio annuale pari a $\frac{5}{4}pI$. In media qual è il beneficio della compagnia in un anno?

c) Supponiamo che inizialmente la compagnia abbia un capitale pari a $K = 10^9$ e che sia $N = 2 \cdot 10^4$, $p = 5 \cdot 10^{-5}$, $I = 10^9$. Dunque essa dispone di un capitale $K + \frac{5}{4}pNI = 2.25 \cdot 10^9$ all'inizio del primo anno e incasserà ancora $\frac{5}{4}pNI = 1.25 \cdot 10^9$ in premi all'inizio del secondo anno. Essa si troverà dunque in difficoltà se avverranno più $(>)$ di due incidenti nel primo anno oppure più $(>)$ di 3 nei primi due anni. Qual è la probabilità che ciò si verifichi?

E2.9 (2.23) Un canale di trasmissione dati può ricevere messaggi binari da due sorgenti diverse A e B con probabilità $\frac{1}{2}$ ciascuna. Ognuna delle due sorgenti produce messaggi in cui i bit successivi sono tra di loro indipendenti. Per la sorgente A però i bit possono essere 1 oppure 0 con probabilità $\frac{1}{2}$, mentre per B il valore 1 si verifica con probabilità $\frac{1}{4}$ e 0 con probabilità $\frac{3}{4}$. Un messaggio di lunghezza n viene ricevuto e in esso si osserva una proporzione di 1 pari a 0.4 (cioè in esso si trovano $n \cdot 0.4$ bit uguali a 1).

a) Supponiamo $n = 10$. Qual è la probabilità che si tratti della sorgente A? Quale delle due sorgenti è la più probabile? E se invece fosse $n = 100$?

b) Rispondere alle stesse domande del punto a) supponendo che a priori i messaggi provengano con probabilità 30% dalla sorgente A e 70% dalla sorgente B.

E2.10 (2.17) Una moneta dà testa con probabilità p e viene lanciata N volte, dove N è una v.a. di Poisson di parametro λ. Indichiamo con X e Y il numero di teste e di croci ottenute rispettivamente.

a) Calcolare le leggi di X e Y.

b) (Più difficile) Dimostrare che X e Y sono indipendenti.

E2.11 (2.18)La memoria secondaria di un calcolatore è composta da 30 unità disco in ognuna delle quali sono archiviate 100 registrazioni (file, in inglese). Durante l'esecuzione di un programma è necessario accedere a 40 di questi file, tutti diversi.

a) Qual è la probabilità che sia necessario utilizzare l'unità 1 ? (Cioè qual è la probabilità che tra i 40 file ve ne sia uno contenuto nell'unità 1 ?)

b) Qual è la probabilità che si debba utilizzare una almeno delle unità 1 e 2 ? Qual è la probabilità che si debba utilizzare sia la 1 che la 2 ?

c) Indichiamo con Y_i la v.a.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'unità } i\text{–esima è utilizzata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, 30$. Qual è la legge di Y_i ? Le Y_i sono indipendenti ? Sono a due a due indipendenti ? Sono non correlate ? Quanto vale il coefficiente di correlazione di Y_1 e Y_2 ?

d) Indichiamo con X il numero di unità disco necessarie per l'esecuzione del programma. Quanto vale $\mathrm{E}[X]$?

E2.12 (2.19) I numeri del lotto vengono estratti uno dopo l'altro dall'urna senza rimpiazzo. Diciamo che si ha una ''coincidenza'' (match) se la pallina numero i viene estratta esattamente alla i–esima estrazione. Indichiamo con A_i l'evento ''si ha coincidenza alla i–esima estrazione''.

a) Quanto vale $\mathrm{P}(A_i)$? Gli eventi $A_1, \ldots, A_{90}$ sono indipendenti ? Sono indipendenti a due a due ?

b) Indichiamo con X il numero di coincidenze che si sono verificate nelle 90 estrazioni. Quanto vale $\mathrm{E}(X)$? Quante concidenze si verificherebbero in media se le palline invece di 90 fossero 1024 ?

c) Quanto vale la varianza di X ?

E2.13 (2.20) Un'urna A contiene n palline tutte rosse. Un'urna B contiene n palline di cui r rosse ($1 \le r < n$) e le rimanenti $n - r$ nere. Si sceglie a caso una delle urne e da essa si effettua una successione di estrazioni *con* rimpiazzo.

a) Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa ?

b) Qual è la probabilità che le prime due palline estratte abbiano colori diversi ?

c) Quante estrazioni sono necessarie in media per veder comparire per la prima volta una pallina rossa ?

d) Sapendo che le prime k palline estratte sono rosse, qual è la probabilità che l'urna dalla quale esse sono state estratte sia l'urna A ? Supponiamo $n = 12$, $r = 4$; quanto grande dovrà essere k perché si possa concludere che l'urna da cui le palline sono state estratte sia l'urna A con una probabilità almeno del 99% ?