

UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Facoltà d'Ingegneria

Anno 2001-02

Corso di *Calcolo delle probabilità e statistica*

P.Baldi, L. Caramellino, B. Pacchiarotti, E. Presutti

Lista di Esercizi n.1

E1.1 (1.2) Da un'urna contenente 4 palline bianche e 3 nere si eseguono due estrazioni con rimpiazzo (cioè la pallina estratta viene subito rimessa nell'urna).

- Calcolare la probabilità che le due palline estratte siano del medesimo colore.
- Calcolare la probabilità che almeno una delle due palline estratte sia nera.

E1.2 Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ degli eventi indipendenti tali che $P(A_i) = p, i = 1, \dots, n$.

a) Qual è la probabilità che nessuno di essi si verifichi?

a) Qual è la probabilità che uno almeno si verifichi? Quanto deve essere grande n perché sia $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq a, 0 \leq a \leq 1$?

E1.3 (1.12) Due numeri vengono estratti, senza reimbuolsamento, da un'urna contenente sei palline numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi?

E1.4 (1.14) Un dado viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità p di ottenere 6 almeno una volta? Quante volte deve essere lanciato il dado perché la probabilità di ottenere 6 almeno una volta sia maggiore o uguale al 90%?

E1.5 (1.4) I componenti prodotti da una certa ditta possono presentare due tipi di difetti, con percentuali del 3% e 7% rispettivamente. I due tipi di difettosità si possono produrre in momenti diversi della produzione per cui si può assumere che le presenze dell'uno o dell'altro siano indipendenti tra loro.

- Qual è la probabilità che un componente presenti entrambi i difetti?
- Qual è la probabilità che esso sia difettoso (cioè che presenti almeno uno dei due difetti)?
- Qual è la probabilità che esso presenti il difetto 1, sapendo che è difettoso?
- Qual è la probabilità che esso presenti uno solo dei due difetti sapendo che è difettoso?

E1.6 (1.9) Dieci urne contengono tutte 4 palline rosse (R) e un numero variabile di palline bianche (B). Più precisamente l'urna i -esima contiene 4 palline R e i palline B. Un'urna viene scelta a caso e da essa vengono estratte due palline.

- Qual è la probabilità che le due palline siano una B e una R?
- Supponiamo che l'estrazione abbia dato come risultato una pallina B e una R. Qual è la probabilità p_i che l'urna prescelta sia la i -esima? Qual è l'urna più probabile?
- Supponiamo invece che vi siano 2 urne contenenti 4 palline R e 10 B (le urne sono quindi 11). Se l'estrazione ha dato come risultato una pallina B ed una R, qual è ora la probabilità che l'urna prescelta sia di tipo i (cioè contenga i palline B)? Qual è ora il valore di i più probabile?

E1.7 (1.18) Un gene è composto da due alleli, ciascuno dei quali può essere di tipo A oppure a. Nella popolazione vi sono dunque tre tipi d'individui: di tipo AA, Aa e aa. Alla riproduzione

ognuno dei due genitori trasmette al figlio uno dei due alleli, scelto a caso. Supponiamo che inizialmente le proporzioni dei tre tipi genetici nella popolazione siano rispettivamente

AA	Aa	aa
p	q	r

dove p, q, r sono numeri ≥ 0 e tali che $p + q + r = 1$.

- Quali saranno le proporzioni dei tre tipi alla generazione successiva?
- E alla seconda generazione? Cosa pensate dell'evoluzione di questa popolazione? Essa tenderà verso un equilibrio genetico?

Questo si chiama modello di Hardy-Weinberg e suppone l'assenza di selezione naturale (ognuno dei tre tipi ha la stessa probabilità di giungere alla riproduzione).

E1.8 (1.16) In un gioco televisivo al concorrente vengono presentate 3 scatole, una sola delle quali contiene il premio. Il giocatore dapprima sceglie una delle scatole (chiamiamola A). Il conduttore del gioco apre quindi una delle altre due scatole (B o C) che egli sa essere vuota (ciò è sempre possibile perché una almeno delle altre due scatole è vuota). A questo punto il giocatore può scegliere se mantenere la sua scelta oppure chiedere invece che venga aperta l'altra scatola rimasta. Calcolare la probabilità di vincere usando una delle seguenti strategie.

- Mantenere la scelta originaria.
- Spostare la sua scelta sull'altra scatola rimasta.
- Giocare a testa o croce tra la strategia a) e la b).

E1.9 (1.10) Un compilatore assegna, ad ognuna delle variabili che intervengono in un programma, una cella di memoria scegliendola a caso e in maniera indipendente da una variabile all'altra. In caso di conflitto (cioè se due variabili vengono assegnate alla stessa cella) l'operazione di assegnazione deve essere ripetuta.

Se vi sono n celle di memoria e k variabili, qual è la probabilità che si verifichi un conflitto? Quanto vale questa probabilità per $n = 1000$ e $k = 25$? Si tratta di una probabilità grande? Come valutate questa procedura?

E1.10 (1.3) Un giocatore di poker riceve all'inizio del gioco cinque carte da un normale mazzo di 52.

- Qual è la probabilità di ricevere almeno 2 assi?
- Qual è la probabilità di ricevere cinque carte dello stesso seme?
- Qual è la probabilità di ricevere un poker servito?

E1.11 (1.7) Un giocatore gioca al lotto i numeri 1, 2, 3. Per aiutare la fortuna nottetempo egli fa in modo di aggiungere all'urna tre palline supplementari con i numeri 1, 2, 3 (quindi ora vi sono nell'urna 93 palline).

- Qual è la probabilità che il trucco venga scoperto (cioè che vengano estratte almeno due palline con numeri uguali)?
- (Più difficile) Di quanto è aumentata la sua probabilità di fare terno?

E1.12 (1.11) Un'urna contiene due palline rosse e quattro nere. Due giocatori A e B giocano nel modo seguente: le palline vengono estratte ad una ad una e messe da parte. A vince se l'ultima pallina è rossa, altrimenti vince B.

- a) Qual è la probabilità che A vinca?
- b) Qual è la probabilità che A vinca sapendo che la prima pallina estratta è rossa?
- c) Qual è la probabilità che A vinca e che la prima pallina estratta sia rossa?

E1.13 (1.5) Un'urna contiene due carte: una di esse ha entrambi i lati neri mentre l'altra ha un lato nero e uno bianco. Una carta viene estratta e se ne guarda uno solo dei lati: è nero. Qual è la probabilità che anche il secondo lato sia nero?

E1.14 (2.1) Una compagnia aerea dispone di due tipi di aerei, uno da 20 e un altro da 10 posti. Poiché si sa che i passeggeri che prenotano poi non si presentano con una probabilità del 10%, vengono sempre accettate 22 prenotazioni sui voli da 20 posti e 11 su quelli da 10. In quale dei due tipi di aereo è maggiore il rischio di lasciare a terra almeno un passeggero che ha regolarmente prenotato, per un volo in cui si è accettato il massimo di prenotazioni?

E1.15 (2.5) a) Un dado viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità che il 6 sia uscito esattamente 2 volte?

b) Qual è la probabilità che in n lanci il 6 sia uscito esattamente 2 volte? Per quale valore di n questa probabilità è massima?

E1.16 (2.8) In un mazzo di n chiavi si cerca quella giusta provandole a caso una dopo l'altra (e mettendo da parte le chiavi già provate). Qual è la probabilità che si debbano fare esattamente k ($k \leq n$) tentativi?

E1.17 (2.6) Nel gioco del lotto ad ogni estrazione (settimanale) cinque numeri vengono estratti simultaneamente da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Fissiamo un numero, ad esempio il 67, e indichiamo con p la probabilità che esso esca in una singola estrazione.

- a) Quanto vale p ? In media ogni quante settimane viene estratto il 67?
- b) Qual è la probabilità che dopo 30 estrazioni il 67 non sia ancora uscito?
- c) Supponiamo che nelle prime 100 estrazioni il 67 non sia ancora uscito. Qual è la probabilità che esso esca entro la 101-esima? Qual è la probabilità che esca dopo la 130-esima?
- d) Qual è la probabilità che esso esca almeno 6 volte nelle prime 50 estrazioni?

E1.18 (2.9) Una fabbrica produce componenti elettronici. Questi escono da due linee di produzione, A e B , nelle proporzioni del 30% e 70% rispettivamente. La linea A ha una percentuale di pezzi difettosi del 10%, contro 17% per B .

- a) Qual è la probabilità che un chip scelto a caso sia difettoso?
- b) I chip vengono venduti in confezioni di 10 pezzi, tutti prodotti dalla stessa linea. Una di queste viene ispezionata e risulta contenere 1 pezzo difettoso. Qual è la probabilità che essa provenga dalla linea A ? Qual è la probabilità che provenga dalla linea B ? Quale delle due eventualità è più probabile?

E1.19 (2.10) Le carte di un mazzo vengono girate ad una ad una. Qual è la probabilità che il primo asso appaia alla k -esima carta? Qual è il valore di k più probabile?