UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Facoltà d'Ingegneria

Anno 2001-02

Corso di *Calcolo delle probabilità e statistica*
P.Baldi, L.Caramellino, B.Pacchiarotti, E.Presutti

Lista di Esercizi n.3

E3.1 (3.1) Per $r > 0, \lambda > 0$ consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} c\, x^{-(\lambda+1)} & \text{se } x > r \\ 0 & \text{se } x \le r \end{cases}$$

a) Determinare c in modo che f sia una densità.

b) Sia X una v.a. di densità f. Per quali valori di λ X ha speranza matematica finita? Per quali valori di λ X ha varianza finita?

c) Qual è la legge di $Y = \log \frac{X}{r}$?

E3.2 (3.4) Un componente elettronico ha un tempo di vita che segue una legge esponenziale di media 10 giorni. Un secondo componente è composto da due elementi in parallelo (il che significa che funziona fintanto che uno almeno dei due elementi è funzionante), ciascuno dei quali ha tempo di vita esponenziale di media 8 giorni.
Qual è la densità del tempo di vita del secondo componente? Quanto vale la sua vita media?

E3.3 (3.6) (Leggi di Rayleigh) Sia X una v.a. reale di densità

$$h_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\, \mathrm{e}^{-x^2/\theta} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove θ è un parametro reale > 0.

a) Calcolare media e varianza di X.

b) Se $Z = X^2$, mostrare che Z segue una legge gamma e calcolarne i parametri.

c) Posto $W = \mathrm{e}^{-X^2/\theta}$, calcolare la densità di W.

E3.4 (3.7) Il punteggio ottenuto dagli studenti alla prova scritta di un esame universitario si può modellizzare con una v.a. di legge normale di media 21 e varianza 9. Qual è la percentuale di studenti che hanno ottenuto un voto superiore ($\ge$) al 24? Qual è la percentuale di studenti che hanno ottenuto un voto inferiore alla sufficienza (≤ 17)?

E3.5 (3.10) Per $r > 0, \lambda > 0$ consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} c\, x^{-(\lambda+1)} & \text{se } x > r \\ 0 & \text{se } x \le r \end{cases}$$

a) Determinare c in modo che f sia una densità.

b) Sia X una v.a. di densità f. Per quali valori di λ X ha speranza matematica finita? Per quali valori di λ X ha varianza finita?

c) Qual è la legge di $Y = \log \frac{X}{r}$?

E3.6 (3.12) (Leggi di Weibull) Per $\alpha > 0, \lambda > 0$ consideriamo la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

a) Mostrare che f è una densità e calcolarne la funzione di ripartizione.

b) Sia T una v.a. di densità f. Calcolare

$$\mathrm{P}\{T > t + s \mid T > s\}$$

Per quali valori di α, λ questa funzione è crescente in s? Per quali valori è decrescente? Dovendo modellizzare con T il tempo di rottura di un'apparecchiatura soggetta ad usura, quali valori di α e λ scegliereste?

c) Sia X una v.a. esponenziale di parametro λ e sia $\beta > 0$. Quanto vale $\mathrm{E}(X^{\beta})$? Qual è la legge di X^{β}? Quanto vale la speranza matematica di una legge di Weibull di parametri α, λ?

E3.7 (3.13) Un componente viene prodotto da una fabbrica che utilizza due diverse linee di lavorazione da cui escono elementi esteriormente indistinguibili ma di qualità diversa. Si può anzi supporre che i pezzi prodotti dalla prima e dalla seconda linea abbiano un tempo di vita esponenziale di parametri λ e μ rispettivamente ($\mu > \lambda$, per fissare le idee). Inoltre è noto che le proporzioni di pezzi prodotti dalle due linee sono rispettivamente p e q ($p > 0, q > 0, p + q = 1$).

a) Un pezzo viene scelto a caso e indichiamo con T il suo tempo di vita. Qual è la legge di T? Quanto vale $\mathrm{E}(T)$?

b) Sapendo che il pezzo è ancora funzionante al tempo s, qual è la probabilità che esso provenga dalla prima linea? Quanto vale questa probabilità per s grande?

E3.8 (3.15) (Legge di Cauchy) Sia X una v.a. uniforme su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (cioè di densità $f(x) = \frac{1}{\pi}$ se $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e $f(x) = 0$ altrimenti). Calcolare la legge di $Y = \tan X$. Quanto vale $\mathrm{E}[Y]$?

E3.9 (3.16) Un componente elettronico è formato da tre elementi in serie, ciascuno dei quali ha un tempo di vita esponenziale di parametri $\lambda = 0.3$, $\mu = 0.1$, $\gamma = 0.2$ rispettivamente.

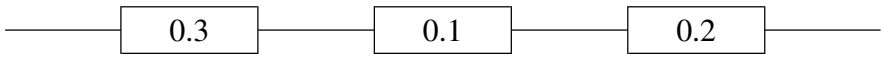

Figura 3.1

a) Indichiamo con T la v.a. ''tempo di vita'' del componente. Qual è la legge di T? Quanto vale il tempo medio di vita del componente?

b) Per aumentare l'affidabilità e ridurre gli interventi di sostituzione, viene proposto di aggiungere un componente identico in parallelo (vedi la Figura 3.2). Qual è la densità del tempo di vita del nuovo complesso? Quanto è ora il tempo medio?

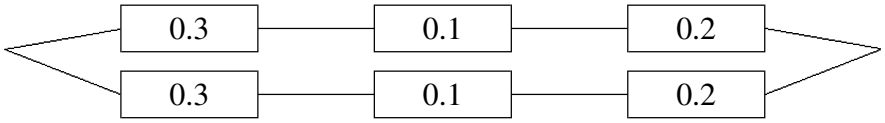

Figura 3.2

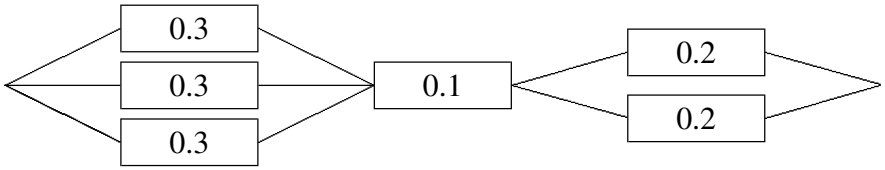

Figura 3.3

c) Un'altra possibilità consiste nel considerare un complesso come nella Figura 3.3, triplicando cioè il primo componente (che è il più fragile) e raddoppiando il terzo. Quanto vale ora il tempo medio di vita? Quale delle due soluzioni (questa o quella del punto b)) è più conveniente?

E3.10 (3.20) Si sa che l'altezza degli uomini in Italia segue approssimativamente una v.a. normale di media 175 cm e varianza 81. Qual è la percentuale di italiani di statura superiore al metro e 90? Alla visita di leva vengono scartate le reclute di altezza inferiore ai 153 cm. Qual è la percentuale di reclute scartate alla visita di leva?

E3.11 (3.21) La legislazione americana è molto severa sulla veridicità delle dichiarazioni che, per legge, devono apparire sulle confezioni dei prodotti. In particolare essa richiede che, per le bottiglie di champagne, il contenuto dichiarato debba essere inteso come un minimo garantito. Periodicamente gli ispettori fanno dei controlli, scegliendo a caso una bottiglia e infliggendo forti multe se essa risulta contenere meno di quanto dichiarato.
La marca Veuve Coquelicot, che dichiara per le sue bottiglie un contenuto di 730 ml dispone di macchine imbottigliatrici che forniscono un riempimento X aleatorio che segue una legge normale di media μ, regolabile, e di varianza $\sigma^2 = 625$. Come deve essere fissata μ perché la probabilità che una bottiglia venga trovata con un contenuto insufficiente sia inferiore a 0.002? Quanto dovrebbe valere μ se la compagnia disponesse invece di imbottigliatrici con varianza $\sigma^2 = 400$?

E3.12 (3.26) Sia X una v.a. uniforme su $[0, 1]$.

a) Posto $Y = \lfloor 6X \rfloor$, calcolare la legge di Y ($\lfloor\ \rfloor$ è la funzione parte intera).

b) Come fareste per simulare un dado? E i numeri di una roulette?

E3.13 (3.27) a) Sia X una v.a. esponenziale di parametro λ e poniamo $Y = \lfloor X \rfloor$. Qual è la legge di Y? Si tratta di una legge nota? Calcolarne la media.

b) Quale potrebbe essere una procedura per simulare una legge geometrica di parametro p?

E3.14 (3.29) In statistica si chiama *indice di skewness* (o di asimmetria) di una v.a. X la quantità

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}((X-\mu)^3)}{\sigma^3}$$

dove $\mu = \mathrm{E}(X)$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ (purché X abbia un momento di ordine 3 finito). L'indice γ in un certo senso misura la simmetria della legge di X: valori di γ positivi indicano la presenza di una ''coda spessa'' verso destra (come nella Figura 3.4), mentre valori negativi indicano la stessa cosa verso sinistra.

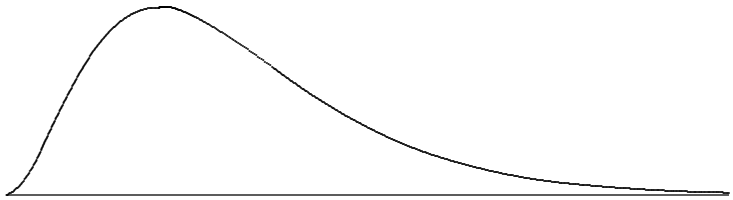

Figura 3.4

a) Quanto vale l'indice di skewness per una legge $N(\mu, \sigma^2)$?
b) E per una legge esponenziale? Per una $\Gamma(\alpha, \lambda)$?
c) Quanto vale γ per una v.a. di Poisson?

(Si ricorda lo sviluppo del binomio di terzo grado: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$)