Problèmes de simulation pour des options path-dépendent : le rôle des grandes déviations

PAOLO BALDI
Université de Roma - Tor Vergata

1 Le problème

Les options barrière sont devenues assez populaires sur les marchés financiers, étant moins coûteuses que les options usuelles, tout en gardant des bonnes performances en termes de contrôle du risque.

Une option barrière diffère des options européennes usuelles par l'introduction d'une ou deux barrières, déterministes mais éventuellement dépendantes du temps, fixes et qui peuvent annuler la valeur de l'option si elle (resp. l'une d'elles) est dépassée par l'actif sous-jacent. C'est ce qu'on appelle des options *knock-out*.

Plus précisément, considérons le cas d'une call knock-out et supposons que l'actif S suit un modèle de Black-Scholes

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 = x.$$

Soient U_1 et L_1 deux fonctions réelles, $: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, telles que $L_1(t) < U_1(t)$ pour tout t . C'est respectivement les barrières inférieures et supérieures. Soit Σ le temps de passage du prix S par l'une des barrières, c'est-à-dire

$$\Sigma = \inf\{t > 0 : S_t \leq L_1(t) \text{ ou } S_t \geq U_1(t)\}.$$

Le prix de l'option est donc

$$\mathbb{E} \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ 1_{\{\Sigma > T\}} \right]$$

(où E désigne la probabilité de risque neutre). Pour calculer ce prix il faut donc connaître la loi de la diffusion S tuée au temps Σ . Il existe dans ce sens des résultats exacts, qui permettent donc d'obtenir des expressions explicites du prix. En particulier :

- S'il n'y a qu'une seule barrière, constante ou bien exponentielle ($t \rightarrow ce^{at}$), la loi de la diffusion S tuée au temps Σ est bien connue depuis longtemps et se trouve (souvent bien cachée sous forme d'exercice. . .) dans les bons livres sur le brownien et les diffusions.

- Dans le cas de deux barrières encore on a des résultats qui donnent la loi, sous forme de série. Mais il faut supposer que les barrières soient constantes (dans ce cas aussi c'est aussi bien connu) ou bien exponentielles (Kunitomo-Ikeda 1992).

- Une autre approche, sur laquelle on ne va pas trop insister, est basée sur le calcul de la transformée de Laplace (Geman-Yor).

De toute façon ces résultats exacts ne sont valables que si la barrière a une forme particulière (constante ou exponentielle) et si l'actif se modélise suivant un mouvement brownien géométrique. Dans les autres cas de figure pour le calcul du prix la simulation est une possibilité naturelle, étant donné ses propriétés de flexibilité et de facilité de réalisation.

Malheureusement elle ne donne pas de bon résultats, du moins si on adapte tout simplement les algorithmes de simulation qui ont été développés pour les diffusions sans barrière. Pour rester dans le modèle de Black-Scholes, typiquement on simule la diffusion $\log S_t$, laquelle, sous la probabilité de risque neutre, n'est qu'un brownien avec drift

$$\log S_t = \log x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t,$$

r étant le taux d'intérêt instantané, supposé constant. Si on fixe un pas de simulation ε , alors on peut simuler successivement les positions $\log S_{t_i}$, aux temps $t_i = i\varepsilon$. On va déclarer la diffusion tuée s'il existe une valeur t_i pour laquelle la valeur $\log S_{t_i}$ se trouve au dessus de $U(t_i) = \log U_1(t_i)$ ou au dessous de $L(t_i) = \log L_1(t_i)$. Il est facile de se rendre compte que cette procédure ne contrôle pas la trajectoire entre deux instants successifs de la grille $t_1, t_2, \dots$: la trajectoire aurait pu traverser l'une des barrières et revenir, sans que ce fait puisse être détecté. Cette erreur produit une surestimation *systématique* de

la valeur du temps Σ et donc de la probabilité de l'événement $\{\Sigma > T\}$ et du prix. En d'autres mots l'estimateur fourni par la simulation est biaisé.

Pour donner une idée: pour une barrière $U \equiv 1$, avec $\sigma = 1$, $x = y = 0.9$, la probabilité de dépassement vaut $e^{-2} > 10\%$.

De plus, dans la pratique, on a constaté que cette erreur est réellement importante et ténace: une réduction du pas ε ne produit que des assez modestes bénéfices. Ce problème était d'ailleurs connu depuis quelques temps dans le cadre de la simulation d'une diffusion tuée.

D'autres exemples, en finance, où il serait souhaitable de disposer de procédures de simulation efficaces sont :

- Les options call *knock-in*, pour lesquelles le contrat n'est activé que si l'une des barrières est touchée. Le prix est donc

$$E \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ 1_{\{\Sigma \leq T\}} \right]$$

- Les analogues options put.
- Les options avec rabais, pour lesquelles le dépassement des barrières produit un changement des termes du contrat.
- Les options parisiennes knock-out (resp. knock-in), pour lesquelles le contrat est annulé (resp. activé) si le prix de l'effectif sous-jacent dépasse l'une des barrières et se maintient au delà pour un temps prédéfini.

2 La procédure

Pour améliorer les résultats des simulations de diffusions tuées dans ces dernières années une procédure particulière a été proposée (Baldi (1995), Anderson et Brotherson-Rathcliffe (1996), Beaglehole Dybvig et Zhou (1997)). Simplement, si dans la simulation des valeurs successifs $\log S_{t_i}$, on a trouvé

$$\log S_{t_i} = x \quad \log S_{t_{i+1}} = y \tag{1}$$

on calcule la probabilité p (dépendante de x, y et des barrières L, U) que le brownien avec drift $\log S$ dépasse l'une des barrières. Avec

probabilité p on déclare que la diffusion a effectivement dépassé les barrières, alors qu'avec probabilité $1 - p$ on continue la simulation. Si on disposait de la valeur exacte de cette probabilité p , il est facile de se rendre compte que cette procédure fournit un estimateur non biaisé du prix.

Encore faut-il être en mesure de calculer cette probabilité. Comme précédemment celle-ci est connue dans certains cas simples. Dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la diffusion $\log S$ conditionnée par (1) est un *pont Brownien*. S'il n'y a qu'une seule barrière constante, disons $U(t) \equiv b$, la probabilité p que le pont Brownien avec les conditions (1), $x, y < b$, dépasse le niveau b vaut

$$p = \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2\varepsilon}(b-x)(b-y)\right)$$

(on rappelle que $\varepsilon = t_{i+1} - t_i$ est le pas de l'approximation).

Aussi dans le cas de deux barrières constantes, on connaît une expression analytique de p , sous forme de série (on la déduit facilement de la loi jointe du Brownien, de son maximum et de son minimum, voir Revuz-Yor, p.105–106).

Le problème reste néanmoins pour des barrières générales, simples et, surtout, doubles. C'est dans ce but qu'on peut utiliser des estimations de grandes déviations précises pour obtenir des approximations de la probabilité p .

3 L'approximation

On suppose, pour simplicité, $t_i = 0$. Le processus $X_t = \log S_t$ est donc un pont Brownien conditionné par $X_\varepsilon = y$ et avec condition initiale x ; il est, en loi, identique au processus

$$W_s^0 = x + \frac{s}{\varepsilon}(y-x) + \sigma(B_s - \frac{s}{\varepsilon}B_\varepsilon) \quad 0 \leq s \leq \varepsilon$$

et, par changement de temps, toujours en loi,

$$W_{\varepsilon t}^0 = x + t(y-x) + \sqrt{\varepsilon}\sigma(B_t - tB_1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Il est bien connu qu'un tel processus, appelons-le Y^ε , est aussi solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dY^\varepsilon(t) &= -\frac{Y^\varepsilon(t) - y}{1-t} dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma dB_t \\ Y^\varepsilon(0) &= x \end{aligned}$$

pour $t < 1$ (par rapport à un brownien différent). En conclusion, la probabilité p^ε que $\log S_t$ conditionné par $\log S_0 = x, \log S_\varepsilon = y$ dépasse l'une des barrières L ou U dans l'intervalle de temps $[0, \varepsilon]$, est égale à la probabilité que Y^ε dépasse les barrières $t \rightarrow L(\varepsilon t)$ ou $t \rightarrow U(\varepsilon t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

L'équation satisfaite par Y^ε apparaît comme celle d'une diffusion avec un petit paramètre qui multiplie le coefficient de diffusion, un cadre dans lequel on peut appliquer la théorie des grandes déviations (les théorèmes de Schilder ou de Wentzell-Freidlin, voir Dembo Zeitouni (1993)).

Cette théorie donne tout de suite une évaluation de $\log p^\varepsilon$:

$$\log p^\varepsilon \sim \frac{I}{\varepsilon}$$

où la constante I est égale à l'inf de la fonctionnelle

$$I : \gamma \rightarrow \int_0^1 |\dot{\gamma}_s|^2 ds - \frac{1}{2} |y-x|^2 \quad (2)$$

pris sur toutes les trajectoires telles que $\gamma_0 = x, \gamma_1 = y$ et avec $\gamma_t \geq U(0)$ ou $\gamma_t \leq L(0)$ pour quelque $t, 0 \leq t \leq 1$. La détermination de l'inf dans (2) est un problème simple de Calcul des Variations, et on trouve $I = 0$ si $y > U(0)$ ou bien $y < L(0)$ et

$$I = \frac{2}{\sigma^2} \min\left((x-U(0))(y-U(0)), (x-L(0))(y-L(0))\right)$$

ce qui revient à dire, pour $L(0) < y < U(0)$,

$$I = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}(x-U(0))(y-U(0)) & \text{si } x+y < L(0)+U(0) \\ \frac{2}{\sigma^2}(x-L(0))(y-L(0)) & \text{si } x+y > L(0)+U(0) \end{cases}$$

Ceci veut dire que, pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$p^\varepsilon = f(\varepsilon) e^{-I/\varepsilon}$$

où f est une fonction qui, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, a un comportement sous-exponentiel. Elle pourrait néanmoins converger à 0 ou bien $+\infty$ de façon, par exemple, polynomiale. Il est donc nécessaire d'améliorer ces estimations. Déterminer le comportement de f pour $\varepsilon \rightarrow 0$ c'est ce qu'on appelle une estimation de grandes déviations *précises*. L'obtention de ce genre d'estimations est en général assez technique.

Une approche à cette question est fournie dans le papier de Fleming et James (1992), pour une classe particulière de diffusions et a été adaptée et explicitée pour le pont Brownien dans Baldi (1995) (cas d'un pont multidimensionnel, mais avec une barrière indépendante du temps) et dans Baldi, Caramellino et Iovino (1999) (cas unidimensionnel, mais barrière(s) dépendante(s) du temps). Le résultat est que

$$f(\varepsilon) \rightarrow e^{-w}$$

où

$$w = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}(U(0) - x)U'(0) & \text{si } x + y > L(0) + U(0), y < U(0) \\ \frac{2}{\sigma^2}(x - L(0))L'(0) & \text{si } x + y < L(0) + U(0), y > L(0) \end{cases}$$

En conclusion la procédure de simulation se réalise de la façon suivante: une fois trouvées les valeurs $\log S_{t_i} = x, \log S_{t_{i+1}} = y$ on pose $p^\varepsilon = 1$ si $y > U(t_i)$ ou bien $y < L(t_i)$ et

$$p^\varepsilon = e^{-I/\varepsilon} e^{-w}$$

si $L(t_i) < y < U(t_i)$, où

$$I = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}(x - U(t_i))(y - U(t_i)) & \text{si } x + y > L(t_i) + U(t_i) \\ \frac{2}{\sigma^2}(x - L(t_i))(y - L(t_i)) & \text{si } x + y < L(t_i) + U(t_i) \end{cases}$$

$$w = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}(U(t_i) - x)U'(t_i) & \text{si } x + y > L(t_i) + U(t_i) \\ \frac{2}{\sigma^2}(x - L(t_i))L'(t_i) & \text{si } x + y < L(t_i) + U(t_i) \end{cases}$$

Avec probabilité p^ε on déclare que la diffusion a touché l'une des barrières, sinon on continue à calculer $\log S_{t_{i+2}} \dots$

4 Essais numériques

Est-ce que la procédure de correction proposée est valable? On va maintenant discuter les résultats de quelques simulations numériques. On verra plus tard les quelques résultats théoriques disponibles actuellement. Pour l'instant il est utile de remarquer que l'estimateur fourni par notre procédure de simulation est certainement non biaisé dans le cas d'une seule barrière constante (et même pour une barrière linéaire-affine), car dans ce cas les valeurs p^ε données par les formules du paragraphe précédant sont exactes.

On compare d'abord les performances de la méthode Monte Carlo usuelle, avec celles de la méthode corrigée comme indiqué précédemment et avec les valeurs fournies par la formule de Kunitomo Ikeda (1992), qui sont valables pour des barrières de la forme

$$L_1(t) = B e^{\delta_2 t} \quad U_1(t) = B e^{\delta_1 t}$$

pour des différentes valeurs de la volatilité σ , du prix d'exercice K du taux d'intérêt de l'actif sans risque r et des paramètres A, B, δ_1, δ_2 ci-dessus. Pour $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (barrières constantes) on peut aussi comparer avec la méthode d'inversion de la transformée de Laplace proposée par Geman et Yor (1996).

Table 1

Option call knock-out avec deux barrières; temps de Maturité 1 an
modèle: *Black-Scholes*

$$(S_0 = 2, \sigma = 0.2, r = 0.02, K = 2, A = 1.5, B = 2.5)$$

(δ_1, δ_2)	$(-0.1, 0.1)$	$(0, 0)$	$(0.1, -0.1)$
G-Y	.	0.04110	.
K-I	0.00916	0.04109	0.08544
cor.M-C	0.00910	0.04104	0.08568
	(0.0003)	(0.0010)	(0.0015)
st.M-C	0.01060	0.04413	0.08929
	(0.0004)	(0.0010)	(0.0016)

Sans entrer dans des détails on voit immédiatement que la méthode Monte Carlo standard apparaît fortement biaisée et que la correction

Table 2

Option call knock-out avec deux barrières; temps de Maturité 1 an
modèle: Black-Scholes

$$(S_0 = 2, \sigma = 0.5, r = 0.05, K = 2, A = 1.5, B = 3)$$

(δ_1, δ_2)	$(-0.1, 0.1)$	$(0, 0)$	$(0.1, -0.1)$
G-Y	.	0.01780	.
K-I	0.00440	0.01786	0.04196
cor.M-C	0.00437 (0.0004)	0.01775 (0.0008)	0.04196 (0.0015)
st.M-C	0.00639 (0.0005)	0.02253 (0.0010)	0.04944 (0.0016)

Table 3

Option call knock-out avec deux barrières; temps de maturité 1 an
modèle: Black-Scholes

$$(S_0 = 2, \sigma = 0.5, r = 0.05, K = 1.75, A = 1, B = 3)$$

(δ_1, δ_2)	$(-0.1, 0.1)$	$(0, 0)$	$(0.1, -0.1)$
G-Y	.	0.07615	.
K-I	0.04375	0.07617	0.11615
cor.M-C	0.04384 (0.0013)	0.07630 (0.0020)	0.11623 (0.0023)
st.M-C	0.04950 (0.0014)	0.08387 (0.0022)	0.12556 (0.0025)

proposée ramène les valeurs des prix obtenus par simulation assez près des valeurs fournies par le méthodes analytiques de Kunitomo-Ikeda et Geman-Yor.

Comme indiqué dans l'introduction, les méthodes proposées s'appliquent dans d'autres cas que les options call européennes, jusque là considérées.

Une option call parisienne knock-out avec deux barrières est une option call européenne ordinaire, mais dont le contrat est annulé si le prix de l'actif passe au dessus d'une barrière supérieure U_1 ou au dessous d'une barrière inférieure L_1 et demeure au delà sans interrup-

tion pendant une période D préspecifiée. Là aussi on pourrait penser d'estimer le prix de l'option par une simulation; on obtiendrait les valeurs $\log S_{t_i}, t_i = \varepsilon i$ du prix de l'actif aux instants successif t_i d'une grille de pas ε . On considérerait le contrat annulé si pour quelques valeurs $t_i = t_{i_0}$ on avait $S_{t_{i_0}} > U_1(t_{i_0})$ (resp $S_{t_{i_0}} < L_1(t_{i_0})$) et si $S_{t_j} > U_1(t_j)$ (resp. $S_{t_j} < L_1(t_j)$) pour $j = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots, i_0 + D\varepsilon^{-1}$. Là encore la procédure Monte Carlo standard n'assure pas que le prix ne soit pas revenu à l'intérieur des barrières entre deux instants $t_j, j = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots, i_0 + D\varepsilon^{-1}$. Comme pour les option call jusque là considérées la procédure Monte Carlo standard risque de produire une erreur systématique dans le sens de fournir un prix trop petit.

Dans le même esprit que tout-à-l'heure, on peut entre deux instants $t_j, j \geq i_0$ calculer la probabilité, p^ε , que le Brownien avec drift $\log S$, avec les conditions $\log S_{t_j} = x, \log S_{t_{j+1}} = y$ touche l'une des barrières et arrêter la décompte du temps passé sans interruption au delà des barrières. La table (par rapport à deux barrières constantes A et B) montre que effectivement cette procédure produit une sensible augmentation du prix de l'option. Il n'y a pas ici de comparaison avec une valeur exacte, mais la procédure de correction introduite devrait être pratiquement exacte, car la probabilité p^ε est elle même exacte (il s'agit en pratique d'un problème avec une seule barrière).

Table 4

Option call parisienne knock-out avec deux barrières; maturité 1 an
modèle: Black-Scholes

$$(S_0 = 2.4, \sigma = 0.2, r = 0.02, K = 2, A = 1.5, B = 2.5)$$

D	0	0.01	0.05	0.1	0.15
cor.M-C	0.04104 (0.0010)	0.05701 (0.0012)	0.07636 (0.0013)	0.09214 (0.0017)	0.10509 (0.0017)
st.M-C	0.04413 (0.0010)	0.05492 (0.0012)	0.07337 (0.0013)	0.08920 (0.0016)	0.10228 (0.0017)

5 Au delà de Black-Scholes

On peut penser d'étendre cette technique des modèles plus généraux que le mouvement brownien géométrique de Black-Scholes. Si le prix de l'actif sous-jacent est modélisé, sous la probabilité de risque neutre, par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = b(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dB_t,$$

on peut simuler le processus $(S_t)_t$ avec le schéma d'Euler $\tilde{S}_{t_{i+1}} = \tilde{S}_{t_i} + b(\tilde{S}_{t_i}, t_i)\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\sigma(\tilde{S}_{t_i}, t_i)X_i$, où $(X_n)_n$ est une suite de v.a. $N(0, 1)$. Si $\tilde{\Sigma}$ désigne le premier instant t_i tel que $\tilde{S}_{t_i}$ dépasse l'une des barrières, le prix de l'option call sera donc approximé par la moyenne empirique de la quantité $e^{-rT}(\tilde{S}_T - K)^+ 1_{\{\tilde{\Sigma} > T\}}$ calculée sur plusieurs simulations indépendantes. Pour contrôler le comportement de la diffusion entre deux points t_i, t_{i+1} de la grille on peut penser d'approximer la diffusion avec le processus

$$S_t^e = S_{t_i}^e + b(S_{t_i}^e, t_i)(t - t_i) + \sigma(S_{t_i}^e, t_i)(B_t - B_{t_i}) \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

C'est la diffusion gaussienne dont les coefficients sont ceux de S , mais gelés en $\tilde{S}_{t_i}$. Si on a trouvé $S_{t_i} = \xi, S_{t_{i+1}} = \eta$, on peut donc calculer la probabilité que cette diffusion (avec les coefficients gelés) touche l'une des barrières. On utilise dans ce but les formules du §3, avec σ remplacé par $\sigma(\xi, t_i)$.

On a fait des simulations avec le modèle CEV (Constant Elasticity of Variance), étudié par Boyle et Tian (1997). Il correspond à l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = rS_t du + \sigma S_t^{\frac{\alpha}{2}} dB_t,$$

où r et σ sont des constantes et $0 < \alpha < 2$. La Table 5 donne des comparaisons entre des simulations avec correction avec les résultats de Boyle et Tian, obtenus avec une autre procédure numérique.

Table 5

Option call knock-out avec deux barrières; temps de maturité 6 mois

modèle: CEV

($K = 105, U = 120, L = 90$)

model	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$
B-T	0.5510	0.5115	0.4746	0.4404
cor.M-C	0.5518 (0.0176)	0.5105 (0.0208)	0.4760 (0.0178)	0.4414 (0.0171)
st.M-C	0.6931 (0.0203)	0.6469 (0.0225)	0.6061 (0.0210)	0.5676 (0.0195)

Comme indiqué précédemment il faudrait connaître des estimations qui donnent des vitesses de convergence (i.e. de décroissance à zéro de la variance de l'estimateur) pour les algorithmes Monte Carlo décrits ici. Signalons dans ce sens ceux de E. Gobet (1998). Il considère le cadre d'une diffusion avec des coefficients b et σ assez généraux (comme dans ce paragraphe) et soit deux barrières constantes ou bien une seule mais éventuellement dépendante du temps. Il est en mesure de montrer que l'estimateur Monte Carlo avec correction pour le calcul d'une fonctionnelle du type

$$E(f(X_T)1_{\{\Sigma > T\}})$$

possède un biais qui tend à zéro avec un ordre $O(\varepsilon)$, à condition que la fonction f soit nulle dans un voisinage des barrières au temps T .

REFERENCES

- Andersen L., Brotherton-Ratcliffe R., (1996) *Exact Exotics*. Risk **9**, 85-89.
- Baldi P. (1995) *Exact Asymptotics for the Probability of Exit from a Domain and Applications to Simulation*. Ann. Probab. **23**, 1644-1670.
- Baldi P., Caramellino L., Iovino M.G. (1999) *Pricing general Barrier options: a numerical approach using sharp large deviations*. Math. Finance, à paraître.

- Beaglehole D. R., Dybvig P. H., Zhou G. (1997): *Going to Extremes: Correcting Simulation Bias in Exotic Option Valuation*. Financial Analysts Journal **53**, 62-68.
- Boyle P.P., Tian Y. (1997): *Pricing Path-Dependent Options under the CEV process*. Working paper.
- Dembo A., Zeitouni O. (1993) *Large Deviations Techniques and Applications*. Jones and Bartlett, Boston-London.
- Fleming W.H., James M.R. (1992) *Asymptotic Series and Exit Time Probability*. Ann. Probab. **20**, 1369-1384.
- Geman H., Yor M. (1996): *Pricing and Hedging Double-Barrier Options: a Probabilistic Approach*. Math. Finance **6**, 365-378.
- Gobet E. (1998) *Schémas d'Euler pour diffusion tuée. Application aux options barrière*. Thèse de l'Université Denis Diderot, Paris 7.
- Kunitomo N., Ikeda M. (1992) *Pricing Options with Curved Boundaries*. Math. Finance **2**, 275-297.
- Revuz D., Yor M. (1994) *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 2nd edition Springer Berlin.