UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Facoltà d'Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti

Esonero del 21 giugno 2001

Esercizio 1 a) Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Da essa vengono effettuate 2 estrazioni *senza* rimpiazzo. Qual è la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi?
b) E se le estrazioni avvenissero *con* rimpiazzo?
c) Rispondere alle questioni a) e b) nel caso che l'urna contenga 900 palline (numerate da 1 a 900).

Esercizio 2 Un giocatore gioca ogni settimana al lotto l'ambo $\{1, 90\}$ su una singola ruota.
a) Qual è la probabilità di vincere in una singola estrazione?
b) In media quanti tentativi sono necessari per vincere?
c) Qual è la probabilità di vincere almeno una volta nelle prime 100 estrazioni?

Esercizio 3 Sia X una v.a. uniforme su $[0,1]$, cioè di densità $f_X(x) = 1$ se $0 \le x \le 1$ e $f_X(x) = 0$ se no. Consideriamo la v.a. $Y = -\frac{1}{3}\log X$. Quanto vale la probabilità $\mathrm{P}(Y \le 0)$? Calcolare la funzione di ripartizione e la densità di Y. Si tratta di una densità nota?

UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Facoltà d'Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti

Correzione dell'esonero del 21 giugno 2001

Esercizio 1 a) Si può considerare come Ω l'insieme delle coppie $\{\omega = (\omega_1, \omega_2), \omega_i = 1, \dots, 5, \omega_1 \ne \omega_2\}$. Si sa che $\#\Omega = 20$. Due possibilità per calcolare la cardinalità dell'evento, A, che interessa. Se indichiamo con A_i l'evento $\{\omega_1 = i\}$, allora si può applicare il metodo della partizione dell'evento certo: si ha

$$A = \bigcup_{i=1}^{5} A \cap A_i$$

ed inoltre la riunione è disgiunta. Ora $A \cap A_i$ è composto da due elementi se $i = 2, 3, 4$ (si tratta delle coppie (ω_i, ω_{i-1}) e (ω_i, ω_{i+1}). Dunque in questo caso $\mathrm{P}(A \cap A_i) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. Invece se $i = 1$ oppure $i = 5$, $A \cap A_i$ è composto da un elemento unicamente, e quindi $\mathrm{P}(A \cap A_i) = \frac{1}{20}$. In conclusione

$$\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Altrimenti si può enumerare direttamente l'evento A e vedere che esso è formato dalle coppie

$$(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,4),\ (4,3),\ (4,5),\ (5,4),$$

da cui si ricava che

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{5} = 0.4$$

b) Poiché ora le estrazioni sono con rimpiazzo, l'insieme dei possibili risultati è $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2), \omega_i = 1, \dots, 5\}$ ed ha cardinalità 25. L'evento A di interesse è però lo stesso che in a). Esso dunque ha cardinalità 8 e

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{8}{25} = 0.32$$

c) Per le estrazioni con rimpiazzo si può considerare $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2), \omega_i = 1, \ldots, 900, \omega_1 \neq \omega_2\}$. Ora $\#\Omega = 900 \cdot 899$. Questa volta è un po' più complicato contare direttamente quante sono le coppie di numeri consecutivi. Si può però ancora usare il metodo della partizione dell'evento certo:

$$A = \bigcup_{i=1}^{900} A \cap A_i$$

dove ancora $A_i = \{\omega_1 = i\}$. Come prima si ha che $A \cap A_i$ ha cardinalità 2 per $i = 2, \ldots, 899$ e cardinalità 1 per $i = 1$ oppure $i = 900$. Dunque

$$\mathrm{P}(A) = 898 \cdot \frac{2}{900 \cdot 899} + 2 \cdot \frac{1}{900 \cdot 899} = \frac{1}{450} = 0.00222222222222$$

Se invece le estrazioni avvengono con reimbussolamento, occorre considerare $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2), \omega_i = 1, \ldots, 900\}$, dunque $\#\Omega = 900^2$. La cardinalità di A resta la stessa e, dal calcolo precedente si ha $\#A = 2 \cdot 898 + 2 = 2 \cdot 899$. Dunque

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2 \cdot 899}{900^2} = 0.00221975308642$$

Esercizio 2 a) Usando la distribuzione ipergeometrica si trova facilmente che la probabilità di fare ambo in una singola estrazione è

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{9 \cdot 89} \stackrel{def}{=} p = 0.0025$$

b) Poiché le estrazioni successive sono indipendenti, siamo in presenza di uno schema successo-insuccesso. Il numero di estrazioni necessario per vincere è una v.a., T, di legge geometrica modificata (cioè $T - 1$ ha legge geometrica) di parametro p. Poiché la media di una v.a. geometrica di parametro p è $\frac{1-p}{p}$,

$$\mathrm{E}(T) = 1 + \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} = 400.5$$

c) Poiché le prove successive sono indipendenti, la probabilità di *non* vincere in nessuna delle prime 100 estrazioni è $(1-p)^{100}$. Dunque la probabilità di vincere almeno una volta è

$$1 - (1-p)^{100} = 0.222$$

Esercizio 3 La funzione di ripartizione di Y è,

$$\mathrm{P}(Y \le t) = \mathrm{P}(-\tfrac{1}{3}\log X \le t) = \mathrm{P}(X \ge e^{-3t})$$

Questa probabilità vale 0 se $t < 0$, perché in questo caso $e^{-3t} > 1$, mentre X prende solo valori in $[0, 1]$. Dunque $\mathrm{P}(Y \le 0)$=0. Se $t \ge 0$, invece, si ha $\mathrm{P}(X \ge e^{-3t}) = \mathrm{P}(X \in [e^{-3t}, 1]) = 1 - e^{-3t}$.
Dunque la f.r. di Y è $F_Y(t) = 1 - e^{-3t}$, se $t \ge 0$ e $F_Y(t) = 0$ se $t < 0$. Derivando si trova che la densità vale

$$f_Y(t) = 3e^{-3t}$$

per $t \ge 0$ e $= 0$ altrimenti. Si riconosce subito una densità esponenziale di parametro 3.