UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Facoltà d'Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti
Esame del 7 settembre 2001

Esercizio 1 Ad una stazione ricevente possono giungere messaggi binari da due canali diversi, A e B. In ognuno di questi messaggi i singoli bit possono prendere i valori 0 e 1 a caso e in maniera indipendente. Nei messaggi provenienti da A ogni singolo bit è uguale a 1 con probabilità $\frac{2}{3}$ e a 0 con probabilità $\frac{1}{3}$. Nei messaggi provenienti da B succede l'inverso: 1 con probabilità $\frac{1}{3}$ e 0 con probabilità $\frac{2}{3}$. Si sa che ogni messaggio può provenire da A o da B con probabilità $\frac{1}{2}$. Poniamo $A_i = \{$lo i-esimo bit è uguale a 1$\}$
a) Quanto vale $\mathrm{P}(A_n)$ (cioè qual è la probabilità che lo n-esimo bit del messaggio valga 1)?
b) Se i primi due bit sono uguali a 1, qual è la probabilità che anche il terzo bit sia uguale a 1?
c) Gli eventi A_i, $i = 1, \ldots, n$ sono indipendenti?
d) Sapendo che tra i primi 3 bit 2 sono uguali a 1 ed 1 a 0, qual è la probabilità che il messaggio provenga dal canale A?
e) Sapendo che tra i primi 30 bit 20 sono uguali a 1 e 10 a 0, qual è la probabilità che il messaggio provenga dal canale A?

Esercizio 2 (Le questioni b) e c) sono indipendenti da a)) Sia X una v.a. esponenziale di parametro λ e sia $\beta > 0$.
a) Quanto vale $\mathrm{E}(X^\beta)$?
b) Calcolare la densità e la funzione di ripartizione di X^β.
c) Calcolare

$$\mathrm{P}\{X^2 > 2 \mid X^2 > 1\}.$$

La v.a. X^2 gode della proprietà di mancanza di memoria?

UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA
Facoltà di Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti
Soluzioni dell'esame del 7 settembre 2001

Esercizio 1 Indichiamo con A e B gli eventi "il messaggio proviene dal canale A" e "il messaggio proviene dal canale B" rispettivamente. Per $i \geq 1$, sia X_i l'i-esimo bit.
a)

$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A_n|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A_n|B)\mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Si chiede $\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$. Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) &= \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)}\\ &= \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2|B)\mathrm{P}(B)}\\ &\frac{(\frac{2}{3})^3\cdot\frac{1}{2} + (\frac{1}{3})^3\cdot\frac{1}{2}}{(\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{2} + (\frac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

c) Abbiamo visto che $\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2} = \mathrm{P}(A_3)$. Ciò prova che gli eventi A_1, A_2, A_3 *non* sono indipendenti.

d) Chiamiamo Y la v.a. che conta il numero di bit uguali a 1 nelle prime tre trasmissioni. Condizionatamente all'evento A la v.a. Y ha distribuzione binomiale $B(3, \frac{2}{3})$ mentre condizionatamente a B $Y \sim B(3, \frac{1}{3})$. Si chiede $\mathrm{P}(A|Y = 2)$.

$$\mathrm{P}(A|Y = 2) = \frac{\mathrm{P}(Y = 2|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(Y = 2)}.$$

Pertanto:

$$\mathrm{P}(Y = 2|A) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

mentre,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(Y = 2) = \mathrm{P}(Y = 2|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(Y = 2|B)\mathrm{P}(B) =\\ &\frac{1}{2}\Big[\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3} + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}\Big] = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\mathrm{P}(A|Y = 2) = \frac{\mathrm{P}(Y = 2|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(Y = 2)} = \frac{2}{3}.$$

e) Con le stesse argomentazioni del punto precedente, se Y è la v.a. che conta il numero di bit uguali a 1 nelle prime trenta trasmissioni, si ha:

$$\mathrm{P}(A|Y=20)=\frac{\mathrm{P}(Y=20|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(Y=20)}.$$

Ora condizionatamente all'evento A la v.a. Y ha distribuzione $B(30,\frac{2}{3})$ mentre condizionatamente all'evento B la v.a. Y ha distribuzione $B(30,\frac{1}{3})$. Pertanto:

$$\mathrm{P}(Y=20|A)=\binom{30}{20}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{20}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{10},$$

mentre,

$$\mathrm{P}(Y=20)=\mathrm{P}(Y=20|A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(Y=20|B)\mathrm{P}(B)=$$
$$\frac{1}{2}\Big[\binom{30}{20}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{20}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{10}+\binom{30}{20}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{20}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{10}\Big],$$

e allora

$$\mathrm{P}(A|Y=20)=\frac{\mathrm{P}(Y=20|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(Y=20)}=\frac{2^{10}}{2^{10}+1}=0.999243.$$

Esercizio 1 a) Indicando con f la densità di X, si ha:

$$\mathrm{E}(X^\beta)=\int_{\mathbb{R}}x^\beta f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^\beta\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}dx$$

Ma, ricordando la densità di una distribuzione Gamma,

$$\int_0^{+\infty}x^\beta\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^\beta}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}x^{(\beta+1)-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}dt=$$
$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^\beta}.$$

b) Calcoliamo la funzione di ripartizione di X^β; per $x>0$ si ha:

$$F_{X^\beta}(x)=\mathrm{P}(X^\beta\le x)=\mathrm{P}(X\le x^{1/\beta})=\int_0^{x^{1/\beta}}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}dt=1-\mathrm{e}^{-\lambda x^{1/\beta}}.$$

Derivando otteniamo la densità di X^β,

$$f_{X^\beta}(x)=\frac{\lambda}{\beta}x^{1/\beta-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^{1/\beta}},\quad x>0.$$

(Si tratta di una densità di Weibull di parametri $(\frac{1}{\beta},\lambda)$).

c)

$$\mathrm{P}(X^2>2\mid X^2>1)=\frac{\mathrm{P}(X^2>2,X^2>1)}{\mathrm{P}(X^2>1)}=$$
$$\frac{\mathrm{P}(X^2>2)}{\mathrm{P}(X^2>1)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^{-\lambda}}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-\sqrt{2})}.$$

Ricordiamo che si dice che una v.a. X gode della proprietà di mancanza di memoria se per ogni $s,t>0$, $\mathrm{P}(X>t+s|X>s)=\mathrm{P}(X>t)$. Quindi $\mathrm{P}(X^2>2\mid X^2>1)$ dovrebbe essere uguale a $\mathrm{P}(X^2>1)$. Dato che $\mathrm{P}(X^2>1)=\mathrm{e}^{-\lambda}$, si può immediatamente dedurre che la variabile X^2 non gode della proprietà della mancanza di memoria.